Einführung: B-Spline basierte Verfahren für Variationsungleichungen

Angela Kunoth und Sandra Boschert

Seminar zur Numerik partieller Differentialgleichungen im SS 2020, Universität zu Köln
24. Januar 2020

Ziel dieses Vortrags:

- Finanzmathematische Anwendungen von Hindernisproblemen
- Numerische Verfahren für Variationsungleichungen mit B-Splines

Verwendete Literatur:

[BHR] Brezzi, F., Hager W., Raviart, P.A.: Error estimates for the finite element solution of variational inequalities, Numerische Mathematik, Vol. 28(4), 1977, S. 431–443.

[BK] Boschert, S., Kunoth A.: Valuation of American options with Heston's model by B-spline based monotone multigrid methods, in preparation, 2020.

[BMZ] Bokanowski, O., Maroso, S., Zidani, H.: Some convergence results for Howard's algorithm, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 47, No. 4, 2009, S. 3001–3026.

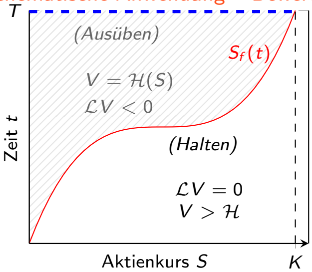
[H] Holtz, M.: Konstruktion B–Spline–basierter monotoner Mehrgitterverfahren zur Bewertung Amerikanischer Optionen, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, 2004.

[DL] Dautov, R. Z., Lapin, A. V.: Sharp error estimate for implicit finite element scheme for American put option, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, Vol. 34, 2019, S.1–11.

[DLZ] Dautov, R. Z., Lapin, A. V., Zhang, S.: Error estimates for Lagrange-Galerkin approximation of American options valuation, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 58, No. 1, 2020, S.48–65.

[KS] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G.: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, SIAM, 2000.

[SJ] Jensen, M., Smears, I.: On the convergence of finite element methods for Hamilton-Jacobi-Bellman equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 51, No. 1, 2013, S. 137–162.



- Bewertung einer Amerikanischen Put-Option mit Payoff $\mathcal{H}(S) = \max(0, K - S)$
- $S_f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist a-priori unbekannter freier Rand.
- S_f ist Aktienkurs, so dass

  - für alle $S \leq S_f$ das Ausüben der Option optimal;
  - für alle $S > S_f$ das Halten der Option sinnvoll.

Zu lösen ist also:

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0 & S > S_f, \; t \in [0, T) \\ V(t, S) = \mathcal{H}(S) & S \leq S_f, \; t \in [0, T) \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \mathcal{V} := \{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi = \mathcal{H} \text{ auf } \partial\Omega\} \\ V \in \mathcal{K} := \{\varphi \in \mathcal{V} : \varphi \geq \mathcal{H}(S) \text{ in } \Omega\} \\ \langle V_t, \varphi - V \rangle - a(V, \varphi - V) \leq 0 \; \forall \varphi \in \mathcal{K} \end{cases}$$

Motivation für B-Splines höherer Ordnung:

- Punktweise Approximation der Risikokennziffern $\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}$ und $\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
- Bessere globale Approximationsgenauigkeit (nur in Spezialfällen)

Themen zu Variationsungleichungen:

Theoretische Themen

(T1) A-priori Fehlerschätzer für Finite-Elemente Methoden elliptischer Variationsungleichungen in der H^1-Norm [BHR]

(T2-T3) A-priori Fehlerschätzer für implizite Finite-Elemente Methoden parabolischer Variationsungleichungen im speziellen Fall von Amerikanischen Optionen [DL, DLZ]

Praktische Themen

(P1) Diskretisierung einer 1d parabolischen Variationsungleichung mit B-Splines höherer Ordnung im Ort und einem Zeitschrittverfahren (Rannacher timestepping, Crank-Nicolson, BDF) $\rightsquigarrow$ Bewertung Amerikanischer Optionen mit dem Black-Scholes Modell [BK,H]

(P2) Diskretisierung einer 2d parabolischen Variationsungleichung mit B-Splines höherer Ordnung im Ort und einem Zeitschrittverfahren (Rannacher timestepping, Crank-Nicolson, BDF) $\rightsquigarrow$ Bewertung Amerikanischer Optionen mit dem Heston Modell [BK,H]

(P3) Monotone Mehrgitterverfahren mit B-splines höherer Ordnung zur Bewertung Amerikanischer Optionen [BK]

(P4) Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung von Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichungen [BMZ]

(P5) Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung von Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichungen [SJ]

$\rightsquigarrow$ Bewertung Europäischer Optionen mit dem Black-Scholes-Barenblatt Modell

Ziel und Sinn dieses Seminars

Eigenständig (mit Hilfestellung) vertiefende Themen bearbeiten und anderen darstellen: wissenschaftliches Arbeiten lernen

Hier: Themen aus der Theorie und Anwendung numerischer Verfahren aus (**engl.**) Buchkapiteln, Originalarbeiten, Online-Dokumentationen und mit Hilfe bereitgestellter Programme in Matlab

Im Anschluß: Masterarbeit möglich

Erforderliche Vorkenntnisse (oder Bereitschaft, sich die zu erarbeiten)

- Algorithmische Mathematik und Numerik mit Kenntnis von B-Splines
- Numerik partieller Differentialgleichungen: Schwache Formulierung von Variationsgleichungen (Sobolevräume, Finite Elemente)

Organisatorisches

- Verbindliche Anmeldung unter `http://www.numana.uni-koeln.de/18761.html` ab 24. Januar (00:00) bis spätestens 29. Januar (24:00) per E-Mail an boschert@math.uni-koeln.de mit ausgefüllter Maske (siehe Webseite)
- Rückmeldung bis zum 3. Februar 2020
- Literatur durcharbeiten und bis ins Detail verstehen; ggf. weitere Arbeiten/Literatur hinzuziehen; Material geeignet auswählen
- Formular zur Anmeldung zum Seminar (Webseite des Math. Inst.) bei Organisatoren abgeben (oder ins Postfach Kunoth bei Frau Georg)
- bis 2 Wochen vor Vortrag an boschert@math.uni-koeln.de erste Version der Folien (max. 15 Folienseiten) zur Durchsicht mailen
- Vortrag halten (max. 30 Minuten)
- bis max. 1 Monat nach dem Vortrag schriftliche Ausarbeitung zum Vortrag an BetreuerInnen; nach einmaliger Durchsicht von Organisatoren kann diese überarbeitet werden
- Note für Modul ergibt sich aus Vortrag, Inhalt/Gestaltung der Folien und schriftlicher Ausarbeitung in finaler Version