A. THIELE
A. HOPT
N. SCHOLTZ

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Probeklausur

Aufgabe 1: (20 Punkte)
Kreuzen Sie die richtige Auswahlmöglichkeit an. Es ist jeweils nur *eine* Antwort richtig.

1. Die Lösung von
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3x(4+x^2)}{x(x-1)(x-2)}\right.$$
ist:
   - ◯ 0
   - ◯ 3
   - ◯ 4
   - ◯ 1

2. Die Lösung von 3^{321} *mod* 3 lautet:
   - ◯ 3
   - ◯ 2
   - ◯ 1
   - ◯ 0

3. Eine Menge $\mathcal{G}$ mit Verknüpfung $*$ heißt abelsche Gruppe, falls welches Axiom erfüllt ist?
   - ◯ $e*a=a\;\forall\, a\in\mathcal{G}$ mit $e\in\mathcal{G}$ neutrales Element
   - ◯ $(a*b)*c=a*(b*c)\;\forall\, a,b,c\in\mathcal{G}$
   - ◯ $a'*a=e\;\forall\, a\in\mathcal{G}$ mit $a'\in\mathcal{G}$ inverses Element und $e\in\mathcal{G}$ neutrales Element
   - ◯ $a*b=b*a\;\forall\, a,b\in\mathcal{G}$

4. Zwei Matrizen A und $B\in K^{nxn}$ heißen äquivalent, falls:
   - ◯ es ein invertierbares $S\in K^{nxn}$ mit $B=SAS^{-1}$ gibt.
   - ◯ es ein invertierbares $S\in K^{nxn}$ mit $B=S^{-1}AS$ gibt.
   - ◯ es invertierbare $S\in K^{mxn}$ und $T\in K^{nxm}$ gibt, mit $B=SAT^{-1}$.
   - ◯ es invertierbare $S\in K^{mxn}$ und $T\in K^{nxm}$ gibt, mit $B=S^{-1}AT$.

5. Die Determinante von $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&5&7&9\\2&4&6&8&10\\0&0&1&2&4\\0&0&2&4&8\end{pmatrix}$ ist:
   - ◯ 2
   - ◯ 4
   - ◯ 5
   - ◯ 0

6. Für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, 3 mal partiell differenzierbar, sind die Möglichkeiten für Multiindizes für $k = 2$
   - ◯ 4
   - ◯ 9
   - ◯ 6
   - ◯ 5
7. Eine Hesse-Matrix $(Hess)(f(x))$ einer Funktion f hat die Eigenwerte -3 und 2, welche der folgenden Eigenschaften trifft zu?
   - ◯ $(Hess)(f(x))$ ist negativ-semi definit und f hat kein lokales Extrema.
   - ◯ $(Hess)(f(x))$ ist positiv-semi definit und f hat kein lokales Extrema.
   - ◯ $(Hess)(f(x))$ ist indefinit und f hat einen Sattelpunkt.
   - ◯ $(Hess)(f(x))$ ist indefinit und f hat ein lokales Extema.
8. Die Hesse-Matrix einer Funktion f ist positiv-semi definit, welche der folgenden Aussagen trifft zu?
   - ◯ $\nabla f(x) = 0$ und $\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0 \; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.
   - ◯ $\nabla f(x) = 0$ und $\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \; \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
   - ◯ Alle Eigenwerte der Hesse-Matrix sind ≤ 0.
   - ◯ f hat ein Maximum.
9. Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ und habe die Nullstellen 2 und $2 + i$. Wo liegt eine weitere Nullstelle von f?
   - ◯ -2
   - ◯ $-2 + i$
   - ◯ $-2 - i$
   - ◯ $2 - i$
10. Welche der folgenden Gleichungen ist keine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung?
    - ◯ $y' = x^2 y$
    - ◯ $ln(y') + ln(\frac{e}{y'}) = xy$
    - ◯ $y' = \frac{3x^2}{exp(y)}$
    - ◯ $y' = \int_0^1 exp(-xs)xy \, ds$

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Standerdbasis $\mathscr{B} = \{e^1, e^2, e^3\}$. Weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $F(e^1) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F(e^2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F(e^3) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$. Berechnen Sie $F(v)$.

b) Berechnen Sie die Matrix A, für die $Ax = F(x)$ für alle $x \in V$ gilt.

c) Sei nun $\mathscr{B}' := \{w^1, w^2, w^3\}$ mit $w_j := F(e^j)$ für $1 \le j \le 3$ eine andere Basis von V. Berechnen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \lambda_{3j} \end{pmatrix}$ mit $F(e^j) = \lambda_{1j}w^1 + \lambda_{2j}w^2 + \lambda_{3j}w^3$ für $1 \le j \le 3$.

d) Sei T die Transformationsmatrix von $\mathscr{B}$ nach $\mathscr{B}'$. Zeigen Sie:

$$AT = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

e) Sei $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

gilt.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

a) Beweisen Sie:

Sei $f : U(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Hat f in $x \in U$ ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(x) = 0$.

b)Es sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass alle Diagonalelemente von A positiv sind. Beweisen oder widerlegen Sie, ob die Umkehrung der Aussage auch gilt.

c)Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) := c + x_1^2 + x_2^2 \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Sei $(x_0, y_0) \in IxJ$ gegeben. Definiere Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ und $G : J \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

und

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt$$

a) Zeigen Sie, dass $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ löst, also dass die Lösung $G(\varphi(x)) = F(x) \forall x \in I'$ erfüllt.

b) Lösen Sie die nachfolgende gewöhnliche Differentialgleichung.

$$y' = xy^2$$

mit $y(0) = 1, y > 0$.

Aufgabe 5: (20 Punkte)

Berechnen Sie die Länge folgender Kurven:

a) $f_1 : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 8t^3 \end{pmatrix}$

b)$f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} rcos(t) \\ rsin(t) \\ ct \end{pmatrix}$, wobei $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b, r > 0$ und $c \neq 0$.