Universität zu Köln

LEA ZAPF

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Probeklausur

Aufgabe 1: (50 Punkte)
Kreuzen Sie die richtige Auswahlmöglichkeit an. Es ist jeweils nur *eine* Antwort richtig.

1. Eine Menge G mit Verknüpfung * heißt Gruppe, wenn folgende Axiome gelten:
   - ◯ $(a*b)*c = a*(b*c) \forall a,b,c \in G$ (Assoziativgesetz) und es gibt ein neutrales Element $e \in G$, sodass $e*a = a \forall a \in G$ und es gibt ein inverses Element $a' \in G \forall a \in G$, sodass $a'*a = e$
   - ◯ $(a*b)*c = a*(b*c) \forall a,b,c \in G$ (Assoziativgesetz) und es gibt ein inverses Element $e \in G$, sodass $e*a = a \forall a \in G$ und es gibt ein neutrales Element $a' \in G \forall a \in G$, sodass $a'*a = e$
   - ◯ $(a*b)*c = a*(b*c) \forall a,b,c \in G$ (Kommutativgesetz) und es gibt ein neutrales Element $e \in G$, sodass $e*a = a \forall a \in G$ und es gibt ein inverses Element $a' \in G \forall a \in G$, sodass $a'*a = e$
   - ◯ $(a*b)*c = a*(b*c) \forall a,b,c \in G$ (Kommutativgesetz) und es gibt ein inverses Element $e \in G$, sodass $e*a = a \forall a \in G$ und es gibt ein neutrales Element $a' \in G \forall a \in G$, sodass $a'*a = e$

2. Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Ring. Dann gilt
   - ◯ R mit $+$ ist abelsche Gruppe, R mit $\cdot$ ist assoziativ und R ist distributiv
   - ◯ R mit $\cdot$ ist abelsche Gruppe, R mit $+$ ist assoziativ und R ist distributiv
   - ◯ R mit $+$ ist abelsche Gruppe, $R \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ ist assoziativ und R ist distributiv
   - ◯ R mit $\cdot$ ist abelsche Gruppe, $R \setminus \{0\}$ mit $+$ ist assoziativ und R ist distributiv

3. Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Ring. Dann gilt
   - ◯ R ist assoziativ, falls $a \cdot b = b \cdot a$
   - ◯ R ist kommutativ, falls $a \cdot b = b \cdot a$
   - ◯ $1 \in R$ ist Nullelement, falls $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
   - ◯ bezüglich $+$ ist kein inverses Element verlangt

4. Seien $f,g \in K[t] g \neq 0. \Rightarrow$ Es gibt eindeutig bestimmte Polynome $q,r \in K[t]$, sodass
   - ◯ $f = q \cdot g$ mit $deg\, r > deg\, g$
   - ◯ $f = q \cdot g + r$ mit $deg\, r > deg\, g$
   - ◯ $f = q \cdot g$ mit $deg\, r < deg\, g$
   - ◯ $f = q \cdot g + r$ mit $deg\, r < deg\, g$

5. Sei $B := \{v^1, ..., v^n\}$ Familie von Vektoren im K-Vektorraum $V \neq \{0\}$. Dann sind äquivalent:
   - ◯ B ist kein linear unabhängiges Erzeugendensystem und B ist eine Basis
   - ◯ B ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem und B ist ein verkürzbares Erzeugendensystem
   - ◯ B ist eine Basis und B ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem
   - ◯ B ist eine Basis und B ist ein verkürzbares Erzeugendensystem

6. Sei $B := \{v^1, ..., v^n\}$ Familie von Vektoren im K-Vektorraum $V \neq \{0\}$. Drei der folgenden Aussagen sind äquivalent, eine Aussage ist falsch. Kreuzen Sie die falsche Aussage an.
   - ◯ B ist eine Basis
   - ◯ B ist verlängerbar linear unabhängig
   - ◯ B ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem
   - ◯ B ist unverlängerbar linear unabhängig

7. Die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist
   - ◯ $-det\, B$ mit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
   - ◯ 20
   - ◯ $det\, B$ mit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
   - ◯ 15

8. Welche der folgenden Familien von Vektoren $(v^j)_{j \in I}$ sind linear unabhängig?
   - ◯ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4096 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Wird ein lineares Gleichungssystem als $Ax = b$ geschrieben, so ist damit gemeint, dass
   - ◯ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
   - ◯ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$
   - ◯ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
   - ◯ $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

10. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
    - ◯ Man kann je zwei Vektoren eines Vektorraums addieren.
    - ◯ Man kann je zwei Vektoren eines Vektorraums multiplizieren.
    - ◯ $\mathbb{R}^n$ besteht aus n-Tupeln von Vektoren.
    - ◯ Jeder Vektorraum hat endlich viele Basisvektoren.

11. Welches der folgenden Objekte hat eine Dimension?
    - ◯ Ein Vektor
    - ◯ Ein Untervektorraum
    - ◯ Ein Basisvektor
    - ◯ Eine Linearkombination

12. Eine Kurve im $\mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar, wenn
   - ◯ jede der Komponentenfunktionen differenzierbar ist
   - ◯ mindestens eine der Komponentenfunktionen differenzierbar ist
   - ◯ jede der Komponentenfunktionen genau n-mal differenzierbar ist
   - ◯ mindestens eine der Komponentenfunktionen genau n-mal differenzierbar ist

13. Ausschließlich für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion gilt
   - ◯ die Reihenfolge der Differentation ist Abhängig von der Variable
   - ◯ die Reihenfolge der Differentation ist Abhängig von der zu integrierenden Variable
   - ◯ die Reihenfolge der Differentation lässt sich nicht vertauschen
   - ◯ die Reihenfolge der Differentation lässt sich vertauschen

14. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Wendet man den LaPlace-Operator Δf an, so erhält man...
   - ◯ ein Skalar
   - ◯ einen Vektor
   - ◯ eine Matrix
   - ◯ eine Basis

15. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Da die Reihenfolge der Differentation irrelevant ist, ist die Hesse'sche Matrix $(Hessf)(x)$
   - ◯ orthogonal
   - ◯ symmetrisch
   - ◯ senkrecht
   - ◯ konvex

16. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, sei $x^* \in U$ mit $\nabla f(x^*) = 0$ und sei $(Hessf)(x^*)$ positiv definit. Dann gilt:
   - ◯ f hat in x^* ein striktes lokales Maximum
   - ◯ f hat in x^* ein striktes lokales Minimum
   - ◯ f hat in x^* kein striktes lokales Extremum
   - ◯ f hat in x^* einen Sattelpunkt

17. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ partiell differenzierbar. Dann lautet der Gradient $\nabla f(x)$:
   - ◯ $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \cdot e^{x^2+y^2} \\ 2x + 2y \cdot e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$
   - ◯ $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x + y \cdot e^{x^2+y^2} \\ x + y \cdot e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$
   - ◯ $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \cdot e^{x^2+y^2} \\ 2y \cdot e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$
   - ◯ $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2y \cdot e^{x^2+y^2} \\ 2x \cdot e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

18. Der Gradient ist
   - ◯ ein spezielles Vektorfeld
   - ◯ ein Skalar
   - ◯ ein Skalarprodukt
   - ◯ eine quadratische Matrix

19. Bestimmen Sie die Divergenz des Vektorfelds von $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^2+2y^2 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$
   - ◯ $div\, f = 4x+2y$
   - ◯ $div\, f = 4x+4y+2x+2y$
   - ◯ $div\, f = 4x+2y^2+x^2+2y$
   - ◯ $div\, f = \frac{2}{3}\cdot x^3+y^2+x^2+\frac{1}{3}y^3$

20. Die Eigenwerte einer Matrix A können berechnet werden über
   - ◯ $det(A-\lambda\cdot A)$
   - ◯ $det(A-\lambda\cdot I)$
   - ◯ $det(I-\lambda\cdot A)$
   - ◯ $det(I-\lambda\cdot I)$

21. Bei der Hesse'schen Matrix $(Hess f)(x)$ handelt es sich um
   - ◯ ein spezielles Vektorfeld
   - ◯ ein Skalar
   - ◯ ein Skalarprodukt
   - ◯ eine quadratische Matrix

22. Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ mit $n,m=1$ eine Funktion. Dann entspricht $\nabla f(x)$
   - ◯ der ersten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   - ◯ der ersten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
   - ◯ der zweiten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   - ◯ der zweiten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$

23. Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ mit $n,m=1$ eine Funktion. Dann entspricht $(Hess f)(x)$
   - ◯ der ersten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   - ◯ der ersten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
   - ◯ der zweiten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   - ◯ der zweiten Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$

24. Eine Kurve ist eine Abbildung von
   - ◯ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ mit $m>1$
   - ◯ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ mit $m>n$
   - ◯ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m>n$
   - ◯ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m<n$

25. Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Dann gilt:
   - ◯ $(Hess f)(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}$
   - ◯ $(Hess f)(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$ mit $m=5$ und $n=3$
   - ◯ $(Hess f)(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m>n$
   - ◯ $(Hess f)(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m<n$

Aufgabe 2: (20 Punkte)
Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := y^4 + x^3 - 4y - 3x$ und geben Sie an, ob es sich dabei um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 3: (20 Punkte)
Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}, f(x_1,x_2) := \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$ im Punkt $P = (1,1)$

Sie dürfen verwenden, dass das Taylorpolynom zweiter Ordnung über
$T_{f,a}(x) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1,a_2) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1,a_2) \cdot (x_2 - a_2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(a_1,a_2) \cdot (x_1 - a_1)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} f(a_1,a_2) \cdot (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(a_1,a_2) \cdot (x_2 - a_2)^2$ berechnet werden kann.

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $y' = 4xy + 3x$ mit $y(0) = c$ mittels Variation der Konstanten. Machen Sie anschließend eine Probe, um Ihre Lösung zu verifizieren.

Aufgabe 5: (20 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C}, f(x,t) := \frac{\exp(i(r-ct))}{r}$ mit $r = \|x\|$ und $c \neq 0$
Lösung der Wellengleichung $\Delta f(x,t) - \frac{1}{c2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$ ist.

Sie dürfen dabei den in der Vorlesung gezeigten Zusammenhang
$\Delta f(r) = f''(r) + f'(r) \frac{n-1}{r}$ verwenden.

Bestimmen Sie c aus der Anfangsbedingung $f(1,0,0,1) = 1$.