Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke

Numerik für Optimierungsprobleme mit PDEs II — Sommersemester 2017

Ausgabe: 21.06.2017

Übung 7

Abgabe: 28.06.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Zeigen Sie das *Lemma von Stechkin*:
Sei $0 < p \leq q < \infty$ und $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Definiere für $N \in \mathbb{N}$ die Indexmenge $\mathcal{I}_N$ mit $\#\mathcal{I}_N = N$ derart, dass $|a_n| \geq |a_m|$ für alle $n \in \mathcal{I}_N$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{I}_N$. Das heißt, $\mathcal{I}_N$ enthält die N Indizes der betraglich größten Folgenglieder von a. Definiere die Folge $a_N = ((a_N)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$(a_N)_n = \begin{cases} a_n & \text{für } n \in \mathcal{I}_N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Folge a_N besteht also aus den N betraglich größten Folgengliedern von a und sonst Nullen. Dann gilt

$$\|a - a_N\|_{\ell_q(\mathbb{N})} \leq N^{-r} \|a\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \qquad \text{mit} \qquad r := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0.$$

Hinweis: Ordnen Sie die Folge a betraglich absteigend an.

Aufgabe 17 (14 Punkte)

Sei $b\colon V \times W \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform mit

$$0 < B_{\max} := \sup_{0\neq v\in V} \sup_{0\neq w\in W} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} < \infty$$

bezüglich zweier Hilberträume V, W mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$ beziehungsweise $(\cdot,\cdot)_W$ und induzierten Normen $\|\cdot\|_V := \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$ sowie $\|\cdot\|_W := \sqrt{(\cdot,\cdot)_W}$.

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger linearer stetiger Operator $B\colon L \to W$ existiert, so dass

$$(Bv, w)_W = b(v,w) \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W$$

mit Operatornorm

$$\|B\|_{L(V,W)} = B_{\max}.$$

Hierbei bezeichnet $L(V,W)$ den Raum der linearen und beschränkten Abbildungen von V nach W und die Operatornorm ist gegeben als

$$\|B\|_{L(V,W)} := \sup_{0\neq v\in V} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Rieszschen Darstellungssatz.

b) Zeigen Sie, dass der Operator $B \in L(V, W)$ aus a) genau dann ein Isomorphismus ist mit

$$\|B^{-1}\|_{L(W,V)} = B_{\min}^{-1},$$

wenn $b(\cdot,\cdot)$ eine *inf-sup Bedingung* erfüllt, d. h. dass eine Konstante $B_{\min} > 0$ existiert mit

$$0 < B_{\min} \coloneqq \inf_{0 \neq v \in V} \sup_{0 \neq w \in W} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W}, \tag{1}$$

sowie

$$\forall 0 \neq w \in W \quad \exists v \in V: \quad b(v,w) \neq 0. \tag{2}$$

Bemerkung: Das bedeutet, dass das Variationsproblem

$$\text{Finde } u \in V \text{ mit} \quad b(u,w) = f(w) \quad \text{für alle } w \in W$$

für $f \in W'$ eine eindeutige Lösung besitzt, falls die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind, wobei W' den Dualraum von W bezeichnet. Somit ist die obige Aussage eine Verallgemeinerung des Satzes von Lax-Milgram.

Hinweis: Um die Surjektivität zu beweisen, ist es nützlich zunächst zu zeigen, dass der Bildbereich abgeschlossen ist, also dass $B(V)$ abgeschlossen ist. Hiermit lässt sich durch eine sinnvolle Zerlegung von W die Surjektivität folgern, also $B(V) = W$.

c) Zeigen Sie, dass die Bedingungen (1) und (2) äquivalent sind zu

$$\inf_{0 \neq v \in V} \sup_{0 \neq w \in W} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \inf_{0 \neq w \in W} \sup_{0 \neq V \in V} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = B_{\min}.$$

Bemerkung: Das bedeutet insbesondere, dass wir die Räume in (1) und (2) vertauschen dürfen.