Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke

Numerik für Optimierungsprobleme mit PDEs II — Sommersemester 2017

Ausgabe: 01.06.2017

Übung 5

Abgabe: 12.06.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 12 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\operatorname*{arg\,min}_{y\in\mathbb{R}^N} J(y), \qquad J(y) := \frac{1}{2}y^T Ay - f^T y \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung

$$By = 0, \tag{2}$$

wobei $f \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit und $B \in \mathbb{R}^{M\times N}$ mit $M \leq N$ und vollem Rang $\operatorname{rank}(B) = M$ gegeben sind.

a) Zeigen Sie, dass sich das Minimierungsproblem (1) unter der Nebenbedingung (2) als Sattelpunktproblem formulieren lässt:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Die Glättungseigenschaft der Richardson-Iteration kann für die Lösung des Sattelpunktproblems (3) verallgemeinert werden. Für $\omega \geq \lambda_{\max}(A)$ betrachtet man die Iteration

$$\begin{pmatrix} y^{(j+1)} \\ p^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(j)} \\ p^{(j)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega I & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f - Ay^{(j)} - B^T p^{(j)} \\ -By^{(j)} \end{pmatrix}, \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}_0,$$

wobei I die Identitätsmatrix bezeichnet. Definiere den Projektor $Q := I - B^T \left(BB^T\right)^{-1} B$ und die Matrix $M := Q\left(I - \frac{1}{\omega}A\right)$ und bezeichne mit (y, p) die Lösung von (3).

b) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

   i) $By^{(j)} = 0$ für $j \in \mathbb{N}$,

   ii) $y^{(j+1)}$ und $p^{(j+1)}$ hängen nur von $y^{(j)}$ ab, aber nicht von $p^{(j)}$ und

   iii) $y^{(j+1)} - y = M\left(y^{(j)} - y\right)$ für $j \in \mathbb{N}$.

c) Nehmen Sie an, dass der Startwert $y^{(0)}$ bereits $By^{(0)} = 0$ erfüllt. Berechnen Sie

$$A\left(y^{(j)} - y\right) + B^T\left(p^{(j+1)} - p\right)$$

in Abhängigkeit von $y^{(0)} - y$ und zeigen Sie:

Da $\left\|I - \frac{1}{\omega}A\right\| \leq 1$ gilt und das Spektrum von M somit in $[-1, 1]$ enthalten ist, folgt die Glättungseigenschaft

$$\left\|A\left(y^{(j)} - y\right) + B^T\left(p^{(j+1)} - p\right)\right\| \leq \frac{\omega}{ej}\left\|y^{(0)} - y\right\|$$

für $j \in \mathbb{N}$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Gegeben sei für $\omega > 0$ das Optimierungsproblem

$$\min_{y,u\in\ell_2} J(y,u), \qquad J(y,u) := \frac{1}{2}\left\|R_Z^{1/2}D_Z^{-1}(y-y_*)\right\|_{\ell_2}^2 + \frac{\omega}{2}\left\|R_U^{1/2}D_U u\right\|_{\ell_2}^2$$

unter der Nebenbedingung

$$Ay = f + u$$

in Wavelet-Koordinaten mit bijektivem Operator $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ und gegebenem Zielzustand $D_Z^{-1}y_* \in \ell_2$ sowie rechter Seite $f \in \ell_2$. Die Riesz-Operatoren R_Z und R_U erfüllen $\|v\|_Z \sim \left\|R_Z^{1/2}v\right\|_{\ell_2}$ für einen Hilbertraum Z mit Norm $\|\cdot\|_Z$ und Entsprechendes für U. Mit D_Z und D_U werden diagonale Skalierungsoperatoren bezeichnet, die aus Einbettungen entstehen.

Zeigen Sie, dass die notwendigen (und hier hinreichenden) Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} Ay &= f + D_U^{-1}u \\ A^T p &= -D_Z^{-1}R_Z D_Z^{-1}\left(y - y_*\right) \\ \omega R_U u &= D_U^{-1}p, \end{aligned}$$

wobei p den adjungierten Zustand bezeichnet, äquivalent sind zu $Qu = g$ mit

$$Q\colon \ell_2 \to \ell_2, \quad Q := D_U^{-1}A^{-T}D_Z^{-1}R_Z D_Z^{-1}A^{-1}D_U^{-1} + \omega R_U, \quad g := D_U^{-1}A^{-T}D_Z^{-1}R_Z D_Z^{-1}\left(y_* - A^{-1}f\right).$$

Aufgabe 14 (4 Punkte)

In der Situation von Aufgabe 13 kann zur Berechnung der rechten Seite

$$g := D_U^{-1}A^{-T}D_Z^{-1}R_Z D_Z^{-1}\left(y_* - A^{-1}f\right)$$

folgendes Verfahren verwendet werden:

$\mathsf{RHS}\,[\zeta, A, f, y_*] \to g_\zeta$

I) $\mathsf{CG}\left[\frac{c_A}{2C}\frac{c_A}{C^2C_0^2}\zeta, 0, A, f\right] \to g_1,$

II) $\mathsf{CG}\left[\frac{c_A}{2C}\zeta, 0, A^T, -D_Z^{-1}R_Z D_Z^{-1}\left(g_1 - y_*\right)\right] \to g_2,$

III) $g_\zeta := D_U^{-1}g_2.$

Hierbei bezeichnet $\mathsf{CG}\,[\varepsilon, q_0, M, z] \to q_\varepsilon$ eine Variante des CG-Verfahrens, die in q_0 startend das Gleichungssystem $Mq = z$ mit der Genauigkeit ε löst, das heißt $\|Mq_\varepsilon - z\| \le \varepsilon$. Zeigen Sie unter Verwendung der Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left\|D_Z^{-1}\right\|, \left\|D_Z^{-1}\right\| &\le C \\ c_A\|v\|_{\ell_2} \le \|Av\|_{\ell_2} &\le C_A\|v\|_{\ell_2} \quad \forall v \in \ell_2 \\ \|R_Z\| &\le C_0^2, \end{aligned}$$

dass RHS die rechte Seite g bis auf den Fehler $\|g_\zeta - g\|_{\ell_2} \le \zeta$ berechnet.