Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke

Numerik für Optimierungsprobleme mit PDEs II — Sommersemester 2017

Ausgabe: 18.05.2017

Übung 4

Abgabe: 01.06.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Die Matrix-Vektor-Schreibweise der Verfeinerungsgleichung

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_{r\in\Delta_{j+1}} m_{r,k}\varphi_{j+1,r}(x) \qquad \text{für alle } k \in \Delta_j$$

lautet

$$\Phi_j = M_{j,0}^T \Phi_{j+1},$$

wobei $M_{j,0} \in \mathbb{R}^{\#\Delta_{j+1}\times\#\Delta_j}$ mit $(M_{j,0})_{rk} := m_{rk}$ und $\Phi_j := (\varphi_{j,k})_{k\in\Delta_j}$ den Spaltenvektor der Funktionen $\varphi_{j,k}$ auf Level j bezeichnet. Zeigen Sie, dass aus der gleichmäßigen Stabilität

$$\|c\|_{\ell_2(\Delta_j)} \sim \left\|c^T\Phi_j\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \qquad \text{für alle } c = (c_k)_{k\in\Delta_j} \in \ell_2(\Delta_j),$$

unabhängig von j, folgt, dass die Matrixnorm von $M_{j,0}$ bezüglich j gleichmäßig beschränkt ist:

$$\|M_{j,0}\| = O(1).$$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Sei φ die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, welche implizit durch eine allgemeine Verfeinerungsgleichung mit gegebenen Koeffizienten a_k ($k \in \mathbb{Z}$) gegeben ist:

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Seien zusätzlich die Translate von φ $L_2(\mathbb{R})$-orthonormal, d. h.

$$(\varphi, \varphi(\cdot - k))_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-k)\,\mathrm{d}x = \delta_{0,k} \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Betrachte nun eine weitere Funktion

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\varphi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R},$$

welche durch die Funktion φ mit den Verfeinerungskoeffizienten

$$b_k := (-1)^k a_{1-k}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

bestimmt ist.

Zeigen Sie, dass die Menge der Translate beider Funktionen

$$\{\varphi(\cdot - k)|k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi(\cdot - k)|k \in \mathbb{Z}\}$$

eine $L_2(\mathbb{R})$-orthonormale Menge bildet.

Aufgabe 9 (7 Punkte)

Definiere Projektoren $P_j\colon L_2(\Omega) \to S_j = S(\Phi_j)$, $j \geq j_0$, durch

$$P_j v := \left(v, \tilde{\Phi}_j\right)_{L_2(\Omega)} \Phi_j := \sum_{k\in\Delta_j} (v, \tilde{\varphi}_{j,k})_{L_2(\Omega)}\, \varphi_{j,k}$$

und entsprechend $\tilde{P}_j\colon L_2(\Omega) \to \tilde{S}_j$ mit vertauschten Rollen von [ ] und [~], wobei die Basen Φ_j und $\tilde{\Phi}_j$ biorthogonal sein sollen, d. h. $(\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,\ell}) = \delta_{k,\ell}$ für alle $k, \ell \in \Delta_j$. Außerdem seien die Räume geschachtelt, d. h.

$$S_j \subset S_{j+1}, \quad \tilde{S}_j \subset \tilde{S}_{j+1}, \qquad j \geq j_0.$$

Der adjungierte Operator P^* eines Operators $P\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ist über die Gleichung

$$(Pf, g)_{L_2(\Omega)} = (f, P^* g)_{L_2(\Omega)} \qquad \text{für alle } f, g \in L_2(\Omega)$$

definiert. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) $P_j^2 = P_j$, d. h. dass P_j ein Projektor ist.

b) $P_r P_j = P_r$ für $r \leq j$.

c) $P_j^* = \tilde{P}_j$.

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Betrachten Sie die Wavelets, die durch die Verfeinerungsgleichung

$$\psi_{j,k} := -\frac{1}{8}\varphi_{j+1,2k} - \frac{1}{4}\varphi_{j+1,2k+1} + \frac{3}{4}\varphi_{j+1,2k+2} - \frac{1}{4}\varphi_{j+1,2k+3} - \frac{1}{8}\varphi_{j+1,2k+4}$$

erzeugt werden, wobei

$$\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi\left(2^j x - k\right) \qquad \text{mit} \qquad \varphi(x) := \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{falls } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $\psi_{j,k}$.

b) Zeigen Sie, dass $\psi_{j,k}$ zwei verschwindende Momente hat, d. h.

$$(p, \psi_{j,k})_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \qquad \forall p \in \Pi_1,$$

wobei Π_1 die Menge der Polynome vom Grad 1 (Ordnung 2) bezeichnet.

c) Welche Aussage lässt sich bezüglich der Exaktheit der biorthogonalen Skalierungsfunktionen $\tilde{\varphi}_{j,k}$ treffen?

Aufgabe 11 (12 Punkte)

Sei $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine (nicht notwendigerweise symmetrische) beschränkte und V-koerzive Bilinearform auf einem Hilbertraum V mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_V := \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$. Es existieren also Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned} |a(v,w)| &\le \alpha_2 \|v\|_V \|w\|_V, \qquad && \forall v,w \in V \\ a(v,v) &\ge \alpha_1 \|v\|_V^2, \qquad && \forall v \in V. \end{aligned}$$

Hierdurch sei ein Operator $A\colon V \to V'$ von V in den Dualraum V' definiert als

$$Av\colon V \to \mathbb{R}, \qquad (Av)(w) := a(v,w) \qquad \forall v,w \in V.$$

a) Zeigen Sie, dass die folgende Normäquivalenz gilt:

$$\|Av\|_{V'} \sim \|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

b) Nach dem Satz von Lax-Milgram ist A invertierbar. Zeigen Sie, dass die Norm des inversen Operators $A^{-1}\colon V' \to V$ gegeben ist durch

$$\left\|A^{-1}\right\| = \left(\inf_{0\ne v\in V} \sup_{0\ne w\in V} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} \right)^{-1}$$

und dass sie sich durch $\|A^{-1}\| \le \alpha_1^{-1}$ abschätzen lässt. Die Operatornorm ist definiert durch

$$\left\|A^{-1}\right\| := \left\|A^{-1}\right\|_{V'\to V} := \sup_{0\ne v\in V'} \frac{\|A^{-1}v\|_V}{\|v\|_{V'}}.$$

c) Sei nun $\Psi := \{\psi_i | i \in \mathbb{Z}\}$ eine Riesz-Basis von V mit

$$c_\Psi \|v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \le \left\|v^T\Psi\right\|_V \le C_\Psi \|v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \qquad \forall v \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

sowie $B_{i,j} := a(\psi_j, \psi_j)$ die Darstellung des Operators A bezüglich der Basis Ψ als bi-infinite Matrix. Da A invertierbar ist, ist auch B invertierbar. Zeigen Sie, dass sich die Normen abschätzen lassen durch

$$\|B\| \le \alpha_2 C_\Psi^2, \qquad \left\|B^{-1}\right\| \le \alpha_1^{-1} c_\Psi^{-2}.$$

Hinweis: Da $\ell_2(\mathbb{Z})$ ein Hilbertraum ist, ist dieser nach dem Riesz'schen Darstellungssatz isometrisch isomorph zu seinem Dualraum $\ell_2(\mathbb{Z})' \simeq \ell_2(\mathbb{Z})$, d. h. es gilt:

$$\|v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \|v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})'} = \sup_{0\ne w\in \ell_2(\mathbb{Z})} \frac{\left|(v,w)_{\ell_2(\mathbb{Z})}\right|}{\|w\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}} \qquad \forall v \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

d) Betrachten Sie nun einen endlich-dimensionalen Unterraum $V_N := \{\psi_1, \dots, \psi_N\} \subset V$ und die daraus resultierende Steifigkeitsmatrix

$$(B_N)_{i,j} := a(\psi_j, \psi_i), \qquad i,j = 1,\dots,N.$$

Zeigen Sie, dass für diese Steifigkeitsmatrix die gleichen Abschätzungen gelten wie in Teil c). Das heißt, dass die Matrix des Ritz-Galerkin Verfahrens asymptotisch optimal konditioniert ist.