



Numerik für Optimierungsprobleme mit PDEs II — Sommersemester 2017

Übung 3

Ausgabe: 11.05.2017

Abgabe: 18.05.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Die Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y &= f & \text{in } \Omega &:= (0, 1)^2 \\ y &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

soll mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens und Tensorprodukt-Hutfunktionen diskretisiert werden. Auf jedem Level $J \in \mathbb{N}$ sind die Ansatzfunktionen

$$\left\{ \varphi_{J,k} \mid \varphi_{J,(k_1,k_2)}(x_1, x_2) := \varphi_{J,k_1}(x_1) \varphi_{J,k_2}(x_2); k_1, k_2 = 1, \dots, 2^J - 1; (x_1, x_2) \in \Omega \right\}$$

mit $\varphi_{J,k_\ell}(x_\ell) := \varphi(2^J x - \ell)$ für $\ell = 1, 2$ durch Translation und Dilatation von Hutfunktionen

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A_J y_J = f_J, \quad A_J \in \mathbb{R}^{(2^J-1)^2 \times (2^J-1)^2}, \quad y_J, f_J \in \mathbb{R}^{(2^J-1)^2}, \quad (1)$$

wobei die Matrix $A_J = (S_J \otimes M_J) + (M_J \otimes S_J)$ sich aus Kronecker-Produkten der eindimensionalen Steifigkeitsmatrix S_J und Massenmatrix M_J zusammensetzt:

$$(S_J)_{i,\ell} := \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \varphi_{J,\ell}(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \varphi_{J,i}(x) \right) dx, \quad (M_J)_{i,\ell} := \int_0^1 \varphi_{J,\ell}(x) \varphi_{J,i}(x) dx.$$

Hierbei wurde lexikographische Sortierung angenommen:

$$y_J = \left(y_{J,(1,1)}, y_{J,(1,2)}, \dots, y_{J,(1,2^J-1)}, y_{J,(2,1)}, \dots, y_{J,(2,2^J-1)}, \dots, y_{J,(2^J-1,2^J-1)} \right)^T.$$

Die rechte Seite f_J entsteht aus entsprechend sortierten Skalarprodukten

$$(f_J)_k := \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) \varphi_{J,k}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Das Kronecker-Produkt (auch Tensorprodukt genannt) von Matrizen $B = (b_{il}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ist allgemein gegeben als

$$B \otimes C := \begin{pmatrix} b_{11}C & \dots & b_{1n}C \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}C & \dots & b_{mn}C \end{pmatrix}.$$

Siehe hierzu auch [NumOptPDE I, Übung 1, Aufgabe 5] aus dem WiSe 16/17.

Das Gleichungssystem (1) soll nun mit dem Multigrid-Algorithmus numerisch gelöst werden. Dazu werden insbesondere Prolongations- und Restriktionsoperatoren bezüglich der Tensorprodukt-Hutfunktionen benötigt. Aufgrund der Tensorprodukt-Struktur lassen sich diese aus eindimensionalen Operatoren ableiten. Diese ergeben sich wiederum aus der Verfeinerungsgleichung für B-Splines der Ordnung 2 (Hutfunktionen):

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(2x-1) + \varphi(2x) + \frac{1}{2}\varphi(2x+1) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{J-1,i} = \frac{1}{2}\varphi_{J,2i-1} + \varphi_{J,2i} + \frac{1}{2}\varphi_{J,2i+1}.$$

Der eindimensionale Restriktionsoperator $r_J \in \mathbb{R}^{(2^{J-1}-1) \times (2^J-1)}$ ergibt sich daher durch

$$(r_J)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j \in 2i-1, 2i+1 \\ 1, & j = 2i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Prolongationsoperator ist entsprechend durch $p_J = r_J^T$ gegeben. Als Glätter soll das mit 1/2 gewichtete Jacobi-Verfahren aus Aufgabe 2 (Übung 1) verwendet werden.

- Geben Sie den zweidimensionalen Restriktions- und Prolongationsoperator an.
- Implementieren Sie einen Zyklus des Multigrid-Verfahrens MGM (J, ν_1, ν_2, μ) aus der Vorlesung in einer Matlab-Funktion `y = MGM(J, Jmin, Aj, fj, yj, nu1, nu2, mu)`, wobei A_j die Matrix und f_j die rechte Seite des Problems beschreiben, y_j der Startvektor ist und $nu1$ die Anzahl der a-priori und $nu2$ die Anzahl der a-posteriori Glättungsschritte bezeichnet. Die Anzahl der rekursiven Anwendungen von MGM im Grobgitterkorrektur-Schritt wird mit mu bezeichnet, J gibt den aktuellen Level und $Jmin$ den minimalen Level (direkte Lösung) an.
- Wenden Sie das Programm auf das obige Laplace-Problem mit $f \equiv 1$ in einem Skript `tabelle.m` an. Verwenden Sie die Funktion `[A, f] = LaplaceMatVek(J)` von der Homepage der Vorlesung zur Konstruktion der Matrizen A_J und rechten Seiten f_J zu gegebenem Level J . Erstellen Sie für $(J, Jmin) = (7, 1)$ jeweils eine Fehlertabelle für V- und W-Zyklus, in der der ℓ_2 -Fehler $\|A_J \tilde{y} - f_J\|_{\ell_2}$ mit $\tilde{y} = \text{MGM}(J, Jmin, A_j, f_j, \mathbf{0}, nu1, nu2, mu)$ für $\nu_1, \nu_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ aufgetragen wird:

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

- Plotten Sie den Fehlerverlauf (d. h. das Residuum) in Abhängigkeit von der Anzahl der Zyklen bzw. Iterationen für das Multigrid-Verfahren und das mit 1/2 gewichtete Jacobi-Verfahren für $(J, Jmin) = (7, 1)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Wählen Sie für beide Verfahren den gleichen elementweise zufällig auf $[0, 10]$ gleichverteilten Startvektor und berechnen Sie den Fehler für die ersten 50 Iterationsschritte. Wählen Sie $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$ und $\mu = 1$ für das Multigrid-Verfahren.
- Die Konvergenzrate des Multigrid-Verfahrens kann durch den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fehler $\|A_J y_J^{(k+1)} - f_J\|_{\ell_2} / \|A_J y_J^{(k)} - f_J\|_{\ell_2}$ ermittelt werden, wobei $y_j^{(k)}$ das Ergebnis des k -ten Zyklus bezeichnet. Plotten Sie den Verlauf des Quotienten für $(J, Jmin) = (7, 1)$ und feste $\nu_2 = 0, \mu = 1$ jeweils für $\nu_1 \in \{1, 2, 3\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwenden Sie den gleichen Startvektor wie in Teil d) und stoppen Sie die Iteration sobald $\|A_J y_J^{(k)} - f_J\|_{\ell_2} < 10^{-11}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ erreicht wurde.