Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke

Numerik für Optimierungsprobleme mit PDEs II — Sommersemester 2017

Ausgabe: 04.05.2017

Übung 2

Abgabe: 11.05.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Die Faltung zweier reellwertiger Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe der Faltung lassen sich die kardinalen B-Splines der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ rekursiv definieren als

$$N_1 := \mathbb{1}_{[0,1)}, \qquad\qquad N_m := N_{m-1} * N_1, \tag{1}$$

wobei $\mathbb{1}_{[0,1)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1)$ bezeichnet:

$$\mathbb{1}_{[0,1)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die B-Splines der Ordnung $m = 2, 3$ mit Hilfe der Definition (1) explizit als stückweise Polynome der Ordnung m an. Plotten oder zeichnen Sie die B-Splines der Ordnung $m = 2, 3, \mathbf{4}$.

b) Beweisen Sie für beliebige reellwertige Funktionen $f, g, h \in L_2(\mathbb{R})$ die folgenden Eigenschaften der Faltung:

   i) Kommutativität: $f * g = g * f$.

   ii) Distributivität: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

   iii) Shift: $f(\cdot - a) * g(\cdot - b) = f * g(\cdot - a - b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

   iv) Skalierbarkeit: $f(\alpha\cdot) * g(\alpha\cdot) = \frac{1}{|\alpha|}(f * g)(\alpha\cdot)$ für $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

c) Beweisen Sie die Symmetrie der B-Splines:

$$N_m(m-x) = N_m(x) \qquad x \in \mathbb{R}, 2 \leq m \in \mathbb{N}.$$

d) Beweisen Sie die Verfeinerungsgleichung für B-Splines:

$$N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N_m(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Ein Beweis kann induktiv über die Ordnung m geführt werden. Nutzen Sie dazu die Definition (1), die Eigenschaften der Faltung aus Teil b) sowie die Darstellung der charakteristischen Funktion durch zwei skalierte und verschobene charakteristische Funktionen

$$\mathbb{1}_{[0,1)}(x) = \mathbb{1}_{[0,1)}(2x) + \mathbb{1}_{[0,1)}(2x-1).$$

e) Geben Sie den Träger $\operatorname{supp}(N_m)$ der B-Splines für allgemeine Ordnung $m \in \mathbb{N}$ an (mit Begründung).

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei φ die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, welche implizit durch eine allgemeine Verfeinerungsgleichung

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi\left(2x - k\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit gegebenen Koeffizienten a_k ($k \in \mathbb{Z}$) bestimmt ist. Weiter seien die Funktionen

$$\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \varphi\left(2^j x - k\right), \qquad j, k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

durch Dilatation und Translation der Funktion φ definiert.

a) Seien zusätzlich die Translate von φ $L_2(\mathbb{R})$-orthonormal, also

$$(\varphi, \varphi(\cdot - k))_{L_2(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-k)\,\mathrm{d}x = \delta_{0,k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_k die folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m a_{2k+m} = 2\delta_{0,k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Skalierung in (2) gerade so gewählt ist, dass

$$\|\varphi_{j,k}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

gilt, d.h. die Norm unabhängig von j ist. Hierbei ist die $L_2(\mathbb{R})$-Norm wie üblich definiert durch

$$\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x}.$$

c) Zeigen Sie die Relation

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2}} a_{m-2k} \varphi_{j+1,m}(x).$$

d) Wählen Sie nun speziell $\varphi := N_2$ (Hutfunktionen aus Aufgabe 4). Skizzieren Sie für diese Wahl die in (2) definierte Funktion $\varphi_{j,k}$ für allgemeines $j, k \in \mathbb{Z}$.