Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke

Numerik für Optimierungsprobleme mit PDEs II — Sommersemester 2017

Ausgabe: 26.04.2017

Übung 1

Abgabe: 04.05.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Betrachten Sie das aus einer PDE stammende diskrete Problem $Ay = f$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und Vektor $f \in \mathbb{R}^N$. Weiter sei ein konvergentes stationäres iteratives Verfahren

$$\bar{y}^{(n)} = S\bar{y}^{(n-1)} + d \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

mit Iterationsmatrix S, Vektor d und Startvektor $\bar{y}^{(0)}$ zur Lösung des Problems gegeben. Durch Kombination aller vorheriger Iterierten $\bar{y}^{(n)}$ $(n = 0, \dots, j)$ soll das Verfahren beschleunigt werden:

$$y^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \nu_{k,j} \bar{y}^{(k)} \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Koeffizienten $\nu_{k,j}$ soll dabei gelten, dass

$$\sum_{k=0}^{j} \nu_{k,j} = 1 \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}_0.$$

a) Erklären Sie, was die Forderung $\sum_{k=0}^{j} \nu_{k,j} = 1$ bedeutet und warum sie wichtig ist.

b) Zeigen Sie, dass für den Fehler $e^{(j)} := y^{(j)} - y_*$, wobei y_* die exakte Lösung bezeichnet,

$$e^{(j)} = p_j(S)e^{(0)} \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

gilt, wobei $p_j(S)$ ein Polynom in S ist.

c) Beweisen Sie für diagonalisierbare S und alle $j \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left\| e^{(j)} \right\|_2 \leq C(S) \max_{\lambda \in \sigma(S)} |p_j(\lambda)| \left\| e^{(0)} \right\|_2,$$

wobei $\sigma(S) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ das Spektrum von S bezeichnet und $C(S) > 0$ eine Konstante ist die von S abhängt. Geben Sie die kleinste Konstante $C(S)$ für symmetrisches S an.

d) Geben Sie für $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ das bestmögliche Polynom p_N an.

e) Nehmen Sie an, dass Schranken $-1 < a \leq \min(\sigma(S)) \leq \max(\sigma(S)) \leq b < 1$ des Spektrums der diagonalisierbaren Matrix S bekannt sind. Finden Sie ein optimales Polynom $p_j \in \Pi_j$ vom Grad höchstens j durch Lösen des Problems

$$\min_{p \in \Pi_j, p(1)=1} \max_{\lambda \in [a,b]} |p(\lambda)|.$$

Hinweis: Verwenden Sie Ihr Wissen über Tschebyscheff-Polynome.

f) Wie kann dieses Verfahren als Glätter in Multigrid-Methoden verwendet werden?

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Betrachten Sie die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet Randwerten

$$\begin{aligned} -\Delta y &= f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2 \\ y &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und gegebener rechter Seite $f \equiv 1$. Die Diskretisierung mit finiten Differenzen unter Verwendung des Standard-Fünf-Punkte-Sterns führt auf ein lineares Gleichungssystem $Au = f$ mit

$$A := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & T & -I \\ & & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}, \tag{1}$$

wobei $h := 1/m$ die Gitterweite, $N := (m-1)^2$ die Länge der Vektoren und $I \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ die Identitätsmatrix bezeichnet. Beachten Sie, dass die Freiheitsgrade in lexikographischer Reihenfolge sortiert wurden:

$$\begin{aligned} y &:= \left(y_{1,1}, \dots, y_{1,m-1}, y_{2,1}, \dots, y_{2,m-1}, \dots, y_{m-1,m-1}\right)^T, & y_{i,j} &\approx y(ih, jh) \\ f &:= \left(f_{1,1}, \dots, f_{1,m-1}, f_{2,1}, \dots, f_{2,m-1}, \dots, f_{m-1,m-1}\right)^T, & f_{i,j} &:= f(ih, jh), \end{aligned}$$

wobei jeweils $1 \leq i, j \leq m-1$ gilt. Die Matrix A und der Vektor f können mittels der Funktion `[A, f] = PoissonMatVekFD(m)` aufgebaut werden. Die Funktion steht auf der Homepage der Vorlesung zum Download bereit.

Zur Lösung soll das gewichtete Jacobi-Verfahren

$$y^{(n)} := \frac{1}{2}\left[I - D^{-1}(L+U)\right] y^{(n-1)} + \frac{1}{2}D^{-1}f \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

mit einem Startvektor $y^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ durchgeführt werden. Dazu wird ein Splitting der Matrix $A = L + D + U$ in eine untere Dreiecksmatrix L, Diagonalmatrix D und obere Dreiecksmatrix U verwendet. Die Eigenvektoren und Eigenwerte der Iterationsmatrix $S := I - \frac{1}{2}D^{-1}A$ sind gegeben durch

$$\left(v^{(k,\ell)}\right)_{i,j=1,\dots m-1} := \sin\left(\frac{ik\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{j\ell\pi}{m}\right), \qquad \lambda^{k,\ell} := \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\ell\pi}{m}\right). \tag{3}$$

a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `y = JacobiGewichtet(A, f, y0, n)`, welche `n` Schritte des gewichteten Jacobi-Verfahrens (2) für ein gegebenes Gleichungssystem `A`y = `f` mit Startvektor `y0` durchführt.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Skript `Aufg2.m`, welches für $m = 32$ das Gleichungssystem $Au = f$ mit den Daten aus (1) aufbaut. Führen Sie jeweils vier Schritte des gewichteten Jacobi-Verfahrens mit den Startvektoren $v^{(k,\ell)}$ aus (3) für

$$k, \ell = 3; \qquad k, \ell = 15; \qquad k, \ell = 25; \qquad k, \ell = 30$$

durch und plotten Sie den Fehler $y_{\text{ref}} - y^{(n)}$ nach jedem Iterationsschritt. Verwenden Sie den \-Operator (`mldivide`) zur Berechnung von y_{ref}.

Was fällt Ihnen bezüglich den Glättungseigenschaften dieses Verfahrens auf und wie lässt sich dieses Verhalten erklären?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Variationsproblem

$$Ay = f, \qquad A\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad y \in H_0^1(\Omega), \quad f \in H^{-1}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ offen.}$$

Sei $A_J\colon \mathbb{R}^{N_J} \to \mathbb{R}^{N_J}$ eine Diskretisierung des Operators A für ein Level $J \in \mathbb{N}$ mit

- $\kappa_2(A_J) \sim 1$ unabhängig von J (optimale asymptotische Vorkonditionierung),
- A_J ist dünnbesetzt („sparse“), d.h. eine Anwendung von A_J benötigt $O(N_J)$ arithmetische Operationen.

Zeigen Sie, dass ein iterativer Löser für einen beliebigen Startvektor $y^{(0)} \in \mathbb{R}^{N_J}$ mindestens $O(JN_J)$ arithmetische Operationen benötigt, um nach n_J Iterationen Diskretisierungsfehlergenauigkeit $\left\| y - y^{(n_j)} \right\|_{H^1(\Omega)} \lesssim 2^{-J}$ zu erreichen.