Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SS 2018

# Bonusblatt

Ausgabe: 11.7.2018 Abgabe: Mittwoch, 18.7.2018 **bis 11:00 Uhr**

Die folgenden Aufgaben sind zusätzliche Bonusaufgaben. Sie sind freiwillig und werden nur korrigiert, wenn noch Punkte zur Klausurzulassung benötigt werden. Die Aufgaben sollen als Klausurvorbereitung dienen.

**Aufgabe B1:** (5 Punkte)
Es ist jeweils nur *eine* Antwort richtig.

1. Was entspricht der Interpolation mit linearen Splines?
   - ◯ Einer Approximation durch einen Polygonzug
   - ◯ Einer Approximation durch Stufenfunktionen
   - ◯ Einer Approximation durch trigonometrische Funktionen
   - ◯ Einer Approximation durch ein lineares Polynom
2. Welche Dimension hat der Splineraum
   $$S_{k,\Delta} := \{S \in C^{k-2}([a,b]) : S\big|_{[\tau_i,\tau_{i+1})} \in \Pi_k \quad \text{für alle } i = 0,\dots,\ell\}?$$
   Hierbei bezeichne $\Pi_k$ den Raum der Polynome der Ordnung $k$ und $\{\tau_i\}_{i=0,\dots,\ell+1}$ paarweise verschiedene Knoten.
   - ◯ $\dim S_{k,\Delta} = k$
   - ◯ $\dim S_{k,\Delta} = \ell$
   - ◯ $\dim S_{k,\Delta} = k+\ell$
   - ◯ $\dim S_{k,\Delta} = k+\ell+2$
3. Welche der folgenden Aussagen über B–Splines ist falsch?
   - ◯ Haben globalen Träger
   - ◯ Bilden eine Basis des Splineraums
   - ◯ Sind nicht negativ
   - ◯ Bilden eine Zerlegung der Eins
4. Wozu werden üblicherweise Gerschgorin–Kreise verwendet?
   - ◯ Zur Abschätzung von Eigenwerten einer Matrix
   - ◯ Zur Abschätzung der Norm von Eigenvektoren einer Matrix
   - ◯ Zur Abschätzung von Winkeln in Dreiecken
   - ◯ Zur Abschätzung des Abstands zweier Punkte in der Ebene

5. Wovon hängt die Konvergenzgeschwindigkeit der Vektoriteration maßgeblich ab?
   - ◯ Von der Größe des betragsmäßig größten Eigenwerts
   - ◯ Von der Größe des betragsmäßig kleinsten Eigenwerts
   - ◯ Von dem Verhältnis der beiden betragsmäßig größten Eigenwerte
   - ◯ Von dem Verhältnis der beiden betragsmäßig kleinsten Eigenwerte

6. Gesucht ist eine numerische Lösung der nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
   - ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit $\Phi(x) := x - f(x)$ konvergiert für jeden Startpunkt mindestens linear.
   - ◯ Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit $\Phi(x) := x - f(x)$ und $\|\Phi'\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}} \|\Phi'(x)\| < 2$ konvergiert mindestens quadratisch.
   - ◯ Das Newton-Verfahren $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ konvergiert für jeden Startpunkt lokal wenigstens linear.
   - ◯ Das Newton-Verfahren $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ konvergiert nur für gewisse Startpunkte lokal quadratisch.

7. Welche der folgenden Aussagen für die Lösung einer Anfangswertaufgabe für gwöhnliche Differentialgleichungen ist korrekt?
   - ◯ Ob ein Einschrittverfahren konvergiert oder nicht, hängt von der Konsistenzordung ab.
   - ◯ Ein explizites Einschrittverfahren konvergiert, wenn die rechte Seite eine Lipschitzbedingung erfüllt.
   - ◯ Ein explizites Einschrittverfahren konvergiert, wenn es konsistent ist und die Verfahrensfunktion eine Lipschitzbedingung erfüllt.
   - ◯ Das explizite Eulerverfahren konvergiert immer, wenn es konsistent ist.

8. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -\frac{1}{y(t)}\sqrt{1 - y(t)^2}, \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

für $t \in [t_0, T]$. Das Anfangswertproblem soll mit dem expliziten Eulerverfahren numerisch in Matlab gelöst werden. Für das explizite Eulerverfahren sei folgende Implementierung gegeben:

```
function [ y ] = exEuler( f, t0, T, N, y0 )
h = (T-t0)/N;
y = zeros(1,N+1);
y(1) = y0;
for j=1:N
y(j+1) = y(j) + h*f(y(j));
end
end
```

Welche der folgenden Funktionsaufrufe liefert eine numerische Approximation einer nicht-trivialen Lösung $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für das Anfangswertproblem (1) auf $[t_0, T]$?

   - ◯ `f = @(z) -1/z*sqrt(1-z^2);`
     `y = exEuler(f,0.9,0.1,100,sqrt(0.99));`
   - ◯ `f = @(z) -1/z*sqrt(1-z^2);`
     `y = exEuler(f,0.1,0.9,100,sqrt(0.99));`
   - ◯ `f = @(z) -1/z*sqrt(1-z^2);`
     `y = exEuler(f,0,1,100,1);`
   - ◯ `f = @(z) -1/z*sqrt(1-z^2);`
     `y = exEuler(f,1,0,100,1);`

9. Sie haben das Differenzenverfahren zur approximativen Lösung der homogenen Poisson-Gleichung kennengelernt. Die Diskretisierung mit dem 5-Punkte-Differenzenstern und Schrittweite $h := \frac{1}{n}$ führte auf ein lineares Gleichungssystem von der Form

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

mit $\mathbf{u} := (u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, \ldots, u_{n-1,n-1})^T$, $\mathbf{f} := (f_{1,1}, f_{2,1}, \ldots, f_{n-1,n-1})^T$ und

$$A := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \tag{2}$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Einheitsmatrix ist und

$$T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Welche Aussagen zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ sind korrekt?

- ○ Im Vergleich zum Jacobi-Verfahren konvergiert für jede Wahl des Relaxationsparameters $\omega$ das SSOR-Verfahren deutlich schneller.
- ○ Im Vergleich zum Jacobi-Verfahren konvergiert das SSOR-Verfahren für bestimmte Relaxationsparameter $\omega$ deutlich schneller.
- ○ Das CG-Verfahren konvergiert nicht.
- ○ Das SSOR-Verfahren konvergiert im Allgemeinen schneller als das CG-Verfahren.

10. Gegeben ist die Matrix $A$ mit $n = 2^j$ aus (2). Die Matrix A soll in Matlab mit Hilfe des Kroneckerproduktes implementiert werden, so dass minimal wenig Speicherplatz benötigt wird. Welche der folgenden Implementierungen erfüllt diese Vorgaben?

○
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=speye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(-I,F));
```

○
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=speye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(F,-I));
```

○
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(1:n-2,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=speye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(F,-I));
```

○
```
n=2^j;
h=1/n;
D = sparse(1:n-1,1:n-1,-2*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E = sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
F = E+D+E';
I=eye(n-1);
A=1/h^2*(kron(F,-I)+kron(-I,F));
```

**Aufgabe B2:** (3 Punkte)

Seien eine Knotenfolge $\Delta := \{\tau_i\}_{i=0,\dots,\ell+1}$ mit $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{\ell+1} = b$ und Stützwerte $\{f_i\}_{i=0,\dots,\ell+1}$ gegeben. Weiterhin sei $s$ der zugehörige interpolierende *kubische* Spline zu $f$ bzgl. $\Delta$, der die Randvorgabe $s'(a) = f'_a$ und $s'(b) = f'_b$ erfüllt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jede Funktion $f \in C^2([a,b])$ mit $f(x_j) = f_j$ für $j = 0,\dots,\ell+1$ sowie $f'(a) = f'_a$ und $f'(b) = f'_b$ gilt

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2,$$

wobei

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

die $L_2(a,b)$-Norm bezeichnet.

b) Für eine beliebige kubische Splinefunktion $\psi \in S_{4,\Delta}$ und $f, s$ wie in a) gilt die Abschätzung

$$\|f'' - s''\|_2^2 \le \|f'' - \psi''\|_2^2.$$

c) Die interpolierende kubische Splinefunktion $s$ löst das Variationsproblem

$$\min_{f\in C^2([a,b])} \|f''\|_2 \quad \text{unter der Nebenbedingung } f(x_i) = f_i,\ f'(a) = f'_a,\ f'(b) = f'_b \quad \text{für } i = 0,\dots,\ell+1.$$

**Aufgabe B3:** (5 Punkte)

Sei $w(x)$ eine feste Gewichtsfunktion auf $[c,d]$ und sei $\langle f,g\rangle := \int_c^d w(x)f(x)g(x)dx$ ein zugehöriges gewichtetes Skalarprodukt. Beweisen Sie folgende Aussage: Zu beliebigem $m \in \mathbb{N}$ existieren eindeutige, paarweise verschiedene Stützstellen $x_0,\dots,x_m \in (c,d)$ und eindeutige Gewichte $w_0,\dots,w_m$, so dass

$$\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j) = \int_c^d w(x)f(x)dx + E(f)$$

und

$$E(f) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{P}_{2m+1},$$

gilt, das heißt die Quadratur ist exakt für Polynome vom Grad $2m+1$.

**Aufgabe B4:** (2 Punkte)

Beweisen Sie die Gronwall'sche Ungleichung:
Seien $u, v$ stückweise stetig und nichtnegativ auf dem Intervall $[t_0, t_0 + a]$ und $C \ge 0$ eine Konstante. Sei weiter

$$v(t) \le C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds$$

für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$. Dann gilt

$$v(t) \le Ce^{\int_{t_0}^{t} u(s)ds}$$

für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$.

**Aufgabe B5:** (5 Punkte)

Die Iterationsvorschrift des *verbesserten Euler-Verfahrens* zum numerischen Lösen von Anfangswertaufgaben

$$y'(t) = f(t,y), \quad y(t_0) = y^0,$$

lautet:

$$y^{j+1} = y^j + hf\left(t_j + \tfrac{h}{2}, y^j + \tfrac{h}{2} f(t_j, y^j)\right), \quad t_{j+1} = t_j + h, \quad j = 0,1,2,\dots,$$

mit einer festen Schrittweite $h$. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ hat, d.h. dass

$$\tau(h) := \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t,y) = O(h^2),$$

wobei

$$\Phi(t,y) = f\left(t + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2} f(t,y)\right)$$

die Verfahrensfunktion des verbesserten Euler-Verfahrens ist.