Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 9

Ausgabe: Mittwoch, 27.6.2018
Abgabe: Mittwoch, 4.7.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 29: (6 Punkte)
Die Funktion $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ mit $m \in \mathbb{N}$ habe in $x^* \in \mathbb{R}$ eine m–fache Nullstelle, d.h. $f^{(i)}(x^*) = 0$ für alle $i = 0, 1, \ldots, m-1$ und $f^{(m)}(x^*) \neq 0$. Weiterhin gebe es eine Umgebung U von x, so dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in U \setminus \{x^*\}$ ist. Zeigen Sie, dass das modifizierte Newtonverfahren

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal quadratisch gegen x^* konvergiert.

Aufgabe 30: (8 Punkte)
a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei gegeben durch

$$f(x) = ((x-e^i)^T(x-e^i)-1)_{i=1,\ldots,n}$$

wobei e^i den i–ten Einheitsvektor bezeichnet. Schreiben Sie zwei MatLab–Funktionen `f.m` bzw. `f_diff.m` , die $f(x)$ und $f'(x)$ zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen.

b) Das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der multivariaten Funktion f lautet

$$x_{k+1} := x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k).$$

Schreiben Sie ein MatLab–Programm `newton.m`, das zu einem gegebenen Startwert x_0 das Newtonverfahren durchführt. Nutzen Sie dazu die beiden Funktionen aus a). Testen Sie das Programm anhand der Startwerte

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 10^{10} \\ 10^{10} \\ \vdots \\ 10^{10} \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_0 = 2e^1.$$

Geben Sie in jedem Schritt x_k und $f(x_k)$ aus und bestätigen anhand der Ergebnisse, dass die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ lokal quadratisch konvergiert.

Aufgabe 31: (6 Punkte)
a) Formulieren Sie die Integralgleichung

$$f(x) = \cos x + \int_0^1 \sin\Big(\frac{xt\pi}{6}\Big) f(t)dt.$$

als Fixpunktgleichung $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$, die bezüglich der Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ eine Kontraktionskonstante $L \leq 0.256$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Integralgleichung genau eine Lösung $f^* \in C([0,1])$ besitzt.

c) Als Startwert der Fixpunktiteration $f_{k+1} := \Phi(f_k)$ werde $f_0 = 0$ verwendet. Wieviele Iterationen K sind notwendig, so dass $\|f_K - f^*\|_\infty \leq 10^{-9}$ gilt?

Hinweis:
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf die erste Seite der Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer. Bitte beachten Sie hierbei die Beschreibung zur Vorgehensweise bei der Abgabe von Matlabaufgaben von Übung 7.