Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 8

Ausgabe: Mittwoch, 20.6.2018
Abgabe: Mittwoch, 27.6.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 26: (10 Punkte, 2+2+2+2+1+1)
Bei der Gauß-Quadratur

$$I_m(f) := \sum_{j=0}^{m} \omega_j f(x_j)$$

wählt man die Gewichte $\omega_0, \ldots, \omega_m$ und Stützstellen $x_0 \ldots, x_m$ so, dass die Quadratur exakt vom Grad $2m+1$ ist. Dies kann man sicherstellen, wenn $x_0, \ldots, x_m$ die Nullstellen des $(m+1)$-ten Orthogonalpolynoms P_{m+1} bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(f,g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, dx, \quad \text{für } \omega(x) > 0, \quad x \in [a.b]$$

sind und

$$\omega_j := \int_a^b \omega(x) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}\, dx.$$

a) Bestimmen Sie die ersten vier Orthogonalpolynome P_0, P_1, P_2 und P_3 bezüglich $\omega \equiv 1$ und $a = -1$ sowie $b = 1$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens, angewandt auf die Monom-Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Normieren Sie die resultierenden Polynome so, dass $P_j(1) = 1$ gilt für $j = 0, \ldots, 3$. Dies sind die *Legendre-Polynome*. Berechnen Sie nun die Nullstellen des vierten Orthogonalpolynoms und die Gewichte $\omega_0, \ldots, \omega_2$.

b) Bestimmen Sie die ersten vier Orthogonalpolynome P_0, P_1, P_2 und P_3 bezüglich $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $a = -1$ sowie $b = 1$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens, angewandt auf die Monom-Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Normieren Sie die resultierenden Polynome wieder so, dass $P_j(1) = 1$ gilt für $j = 0, \ldots, 3$. Dies sind die *Tschebyscheff-Polynome*. Berechnen Sie nun die Nullstellen des vierten Orthogonalpolynoms und die Gewichte $\omega_0, \ldots, \omega_2$.

c) Wie lässt sich b) verwenden, um auch Integrale der Form

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

zu approximieren? Geben Sie dazu explizit die Approximation des Integrals bezüglich der Gewichte $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ sowie der Stützstellen x_0, x_1, x_2 aus b) an.

d) Implementieren Sie die Legendre-Gauß-Quadratur für $m = 2$ wie in a) sowie die Tschebyscheff-Gauß-Quadratur für $m = 2$ wie in b) und approximieren Sie damit das Integral

$$I(f) := \int_{-1}^{1} \left(x^5 - x^4 + x^2 + \frac{1}{15} \right) dx.$$

Wie groß ist jeweils der Fehler der Approximation? Begründen Sie das Resultat.

e) Nutzen Sie diese beiden Verfahren und bestimmen Sie

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Was lässt sich hier über die Genauigkeit der Ergebnisse sagen? Begründen Sie das Resultat.

f) Wie lässt sich das Integral

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$$

transformieren, um eine Darstellung zu erhalten, mit der die Gauß-Tschebyscheff-Quadratur exakt ist?

Aufgabe 27: (4 Punkte,1+1+1+1)

Beweisen Sie den *Banachschen Fixpunktsatz*:
Sei X ein Banachraum, und sei $E \subset X$ abgeschlossen. Die Abbildung $\Phi : E \to E$ sei eine Kontraktion, d.h. es gebe eine Konstante $L < 1$, so dass für alle $x, y \in E$ gilt:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Dann gilt:
a) Φ hat genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x^* \in E$ mit $\Phi(x^*) = x^*$.
b) Zu jedem Startwert $x_0 \in E$ konvergiert die rekursiv durch

$$x_{k+1} := \Phi(x_k)$$

definierte Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt x^*.
c) Es gilt die *a priori*–Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

d) Es gilt die *a posteriori*–Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Aufgabe 28: (6 Punkte, 2+1+2+1)

a) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ beliebige Normen des $\mathbb{R}^n$ bzw. R^m. Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{R}^m$ und alle $x, y \in E$ gilt:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_m \leq \sup_{z\in E}\|\Phi'(z)\|_{n\to m}\|x - y\|_n$$

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu a), falls E zusammenhängend, aber nicht konvex ist.

c) Zeigen Sie, dass das System

$$\cos x - 6x + 2y = 0$$
$$\sin x + xy^2 - 8y = 0$$

auf $[0,1]^2$ eine eindeutige Lösung besitzt.

d) Berechnen Sie die Lösung approximativ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-3} bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$.

Hinweis:
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf die erste Seite der Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer.