Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
SANDRA BOSCHERT
JOSE LICON

NUMERISCHE MATHEMATIK
SOSE 2018

Übungsblatt 6

Ausgabe: Mittwoch, 6.6.2018
Abgabe: Mittwoch, 13.6.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 19: (2 Punkte)
Betrachten Sie die allgemeine erweiterte Knotenfolge aus (7.3.9) im Skript

$$T := \{\theta\}_{i=1,\dots,n+k}$$

mit $\theta_i < \theta_{i+k}$ für $i = 1,\dots,n$, also

$$\theta_1 = \dots = \theta_k = a < \theta_{k+1} \leq \dots \leq \theta_n < b = \theta_{n+1} = \dots = \theta_{n+k}.$$

Sei $\{N_{i,k} \colon i = 1,\dots,n\}$ die B–Spline–Basis bezüglich dieser erweiterten Knotenfolge T auf dem Intervall $[a,b]$. Beweisen Sie, dass die B–Splines eine *Zerlegung der Eins* bilden. Das heißt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} N_{i,k}(x) = 1$$

für alle $x \in [a,b]$ und beliebiges $1 \leq k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 20: (5 Punkte, 2+3)
Die Menge der B-Splines der Ordnung k bezüglich einer Knotenfolge $T := \{\theta_i\}_{i=1,\dots,n+k}$ mit

$$\theta_1 = \cdots = \theta_k = a < \theta_{k+1} \leq \cdots \leq \theta_n < b = \theta_{n+1} = \cdots = \theta_{n+k}$$

ist gegeben durch

$$\mathcal{N}_k(T) = \mathcal{N}_{k,T} := \operatorname{span}\{N_{i,k} : i = 1,\dots,n\}.$$

a) Bestimmen *und* skizzieren Sie die linearen B-Spline-Basiselemente $N_{i,2}$ für die spezielle Knotenfolge T mit

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 < \theta_3 = \tfrac{1}{2} < \theta_4 = \theta_5 = 1.$$

Skizzieren Sie die verschiedenen Basisfunktionen in *einem* Koordinatensystem. Die Skizze kann per Hand oder auch mit Hilfe von Matlab, Maple, Gnuplot, Mupad oder ähnliches erzeugt werden.

b) Fügen Sie nun einen zusätzlichen Knoten in der Mitte des Intervalls ein, d.h. betrachten Sie die Knotenfolge $\tilde{T}$ mit

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 < \theta_3 = \theta_4 = \tfrac{1}{2} < \theta_5 = \theta_6 = 1.$$

Bestimmen und skizzieren Sie die linearen B-Spline Basiselemente $N_{i,2}$ für diese Knotenfolge $\tilde{T}$. Folgern Sie, dass die Elemente $S \in N_{k,\tilde{T}}$ nun nicht mehr zwangsläufig global stetig sein müssen, d.h.

$$\mathcal{N}_{k,\tilde{T}} \not\subseteq C^0([a,b)).$$

Aufgabe 21: (9 Punkte, 3+3+3)

Gegeben seien $n+1$ Stützstellen $t_0 < \cdots < t_n$ mit zugehörigen Funktionswerten f_i. Es soll ein kubischer Spline $S(t)$ durch diese Punkte bestimmt werden, der zweimal stetig differenzierbar ist, d.h. wenn

$$p_i(t) := a_i(t-t_i)^3 + b_i(t-t_i)^2 + c_i(t-t_i) + d_i$$

das Polynom auf dem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ bezeichnet, soll gelten:

$$\begin{array}{llll} (\star) & p_i(t_i) = f_i, & p_i(t_{i+1}) = f_{i+1} & \text{für } i = 0,\dots,n-1, \\ (\star\star) & p_i'(t_{i+1}) = p_{i+1}'(t_{i+1}), & p_i''(t_{i+1}) = p_{i+1}''(t_{i+1}) & \text{für } i = 0,\dots,n-2. \end{array}$$

Die Gleichungen $(\star)$ sind die Interpolationsbedingungen, die Gleichungen $(\star\star)$ die Übergangsbedingungen, die die zweifache Differenzierbarkeit gewährleisten. Weil dies zusammen lediglich $2n+2(n-1) = 4n-2$ Gleichungen für die $4n$ Unbekannten a_i, b_i, c_i, d_i sind, fordert man zusätzlich

$$(\star\star\star) \quad S''(t_0) = S''(t_n) = 0 \qquad \text{(natürliche Randbedingungen)},$$

um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem wird in mehreren Schritten gelöst.

a) Nehmen Sie an, Sie kennen bereits die zweiten Ableitungen $m_i := S''(t_i)$ in den Stützstellen. Berechnen Sie daraus den Spline. (Damit haben Sie $(\star)$ sowie $p_i''(t_{i+1}) = p_{i+1}''(t_{i+1})$ für $i = 0,\dots,n-2$ erfüllt.)

b) Gewinnen Sie aus der Bedingung $p_i'(t_{i+1}) = p_{i+1}'(t_{i+1})$ eine Gleichung für m_i, m_{i+1} und m_{i+2}. Fassen Sie diese Gleichungen ($i = 0,\dots n-2$) und $(\star\star\star)$ zu einem Gleichungssystem für die m_i zusammen.

c) Berechnen Sie den zweifach stetig differenzierbaren kubischen Spline S mit der Randbedingung $S''(t_0) = S''(t_3) = 0$ durch die Punkte $(t_i, f_i) = (0,1), (1,1), (2,2), (3,2), i = 0,1,2,3$.

Beachten Sie, dass in dieser Vorgehensweise *keine* B-Spline-Basis als Ansatz benutzt wurde, sondern dass der kubische Spline hier direkt über die Interpolations- und Übergangsbedingungen, bzw. dem Lösen der entsprechenden Gleichungen aus a) und b), bestimmt wurde.

Aufgabe 22: (4 Punkte, 2+2)

Neben der Definition der B-Splines wie in Übung 4, Aufgabe 16, lassen sich die B-Splines auch mit Hilfe der *Faltung* definieren. Die Faltung zweier Funktionen ist wie folgt definiert:

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Unter Benutzung der Faltung definiere nun

$$\begin{aligned} N_1(x) &:= \chi_{[0,1)}(x) \\ N_k(x) &:= (N_{k-1} * N_1)(x). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die $N_k(x)$ für $k = 1,2,3,4$.

b) Offensichtlich stimmt N_1 mit $N_{i,1}$ überein, wenn $\tau_i = 0$ und $\tau_{i+1} = 1$ sind. Wählen Sie nun (der Einfachheit halber) die Knotenfolge $\{\tau_0 = 0, \tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \dots\}$ und zeigen Sie für $k = 1,2,3,4$, dass für diese Wahl der Knotenfolge

$$N_k \equiv N_{0,k}$$

gilt.

Hinweis:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf die erste Seite der Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer.