Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 5

Ausgabe: Mittwoch, 30.5.2018
Abgabe: Mittwoch, 6.6.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a (und per e-Mail, siehe unten).

Aufgabe 18: (12+2+2+4=20 Punkte)
Betrachte die allgemeine erweiterte Knotenfolge

$$T := \{\theta\}_{i=1,\dots,n+k}$$

mit $\theta_i < \theta_{i+k}$ für $i = 1,\dots,n$, also

$$\theta_1 = \ldots = \theta_k = a < \theta_{k+1} \leq \ldots \leq \theta_n < b = \theta_{n+1} = \ldots = \theta_{n+k}.$$

Definiere dazu das lineare Erzeugnis der B–Splines auf T gemäß

$$\mathcal{N}_k(T) := \operatorname{span}\{N_{i,k} : i = 1,\dots,n\},$$

d.h. jedes Element $S \in \mathcal{N}_k(T)$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i N_{i,k}(x), \quad \text{für } x \in [a,b].$$

Durch Einsetzen der Rekursionsformel für B–Splines bekommt man daraus

$$S(x) = \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{[r]}(x) N_{i,k-r}(x),$$

wobei sich die Koeffizienten rekursiv bestimmen lassen als

$$c_i^{[r]} = \left\{ \begin{array}{cl} c_i, & \text{falls } r = 0 \\ \dfrac{x-\theta_i}{\theta_{i+k-r}-\theta_i} c_i^{[r-1]}(x) + \dfrac{\theta_{i+k-r}-x}{\theta_{i+k-r}-\theta_i} c_{i-1}^{[r-1]}(x), & \text{falls } r > 0 \\ 0, & \text{falls } \theta_{i+k-r} = \theta_i \end{array} \right\}.$$

Speziell für den Fall $r = k-1$ und $x \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ folgt

$$N_{i,k-r}(x) = N_{i,1}(x) = \chi_{[\theta_i,\theta_{i+1})}(x)$$

und damit

$$S(x) = c_i^{[k-1]}(x).$$

Zur rekursiven Berechnung der $c_i^{[r]}(x)$ bietet sich ein Neville–artiges Schema an:

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_{i-k+1} & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
c_{i-k+2} & \rightarrow & c_{i-k+2}^{[1]}(x) & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
c_{i-k+3} & \rightarrow & c_{i-k+3}^{[1]}(x) & \rightarrow & c_{i-k+3}^{[2]}(x) & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \cdots & \searrow & & \\
c_i & \rightarrow & c_i^{[1]}(x) & \rightarrow & c_i^{[2]}(x) & \cdots & \rightarrow & c_i^{[k-1]}(x) &
\end{array}$$

a) Implementieren Sie das Neville-Schema zur Funktionsauswertung von B–Splines. Halten Sie das Schema so allgemein, dass für beliebige Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{c} := (c_1, \ldots, c_n)^T$ und einer im allgemeinen nicht-äquidistanten erweiterten Knotenfolge $T := \{\theta_i\}_{i=1,\ldots,n+k}$ die Spline-Funktion

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i N_{i,k}(x)$$

an jeder beliebigen Stelle $x \in [a,b) = [\theta_k, \theta_{n+1})$ und für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ ausgewertet werden kann.

b) Wählen Sie nun speziell die erweiterte Knotenfolge

$$\theta_1 = \ldots = \theta_k = 0 < \theta_{k+1} = 1 < \ldots < \theta_{2k-1} = k-1 < k = \theta_{2k} = \ldots = \theta_{3k-1}, \tag{1}$$

und berechnen Sie mit dem Algorithmus aus a) die Funktionswerte des Splines $S(x) := N_{k,k}(x)$ an den Punkten $x_\ell := \ell\, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, k2^j - 1$ und $j = 5$ jeweils für $k = 1, \ldots, 4$.

c) Betrachten Sie erneut die erweiterte Knotenfolge (1). Hier fällt insbesondere auf, dass die ersten k Knoten zusammenfallen. Plotten Sie die B–Splines $N_{i,4}$ für $i = 1,2,3,4$ bezüglich der erweiterten Knotenfolge (1), indem Sie wie in Teil b) das Neville-Schema verwenden, um die Funktionswerte der Splines an den Punkten $x_\ell := \ell\, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, 4 \cdot 2^j - 1$ und $j = 5$ zu bestimmen.

d) Wählen Sie nun die nicht-äquidistante erweiterte Knotenfolge

$\theta_1 = \theta_2$	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	$\theta_7 = \theta_8$
0	1	2	2.1	3	4

Plotten Sie alle zu dieser erweiterten Knotenfolge definierten B–Splines $N_{i,2}$ in *einer Grafik*, indem Sie wie in Teil b) das Neville-Schema verwenden, um die Funktionswerte der Splines an den Punkten $x_\ell := \ell\, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, 4 \cdot 2^j - 1$ und $j = 10$ zu bestimmen.

e) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) := \sin(2\pi x), \qquad x \in [0,1],$$

und die Menge der Stützstellen

$$\tau_\ell := \frac{\ell - 1}{20}, \qquad \ell = 1, \ldots, 21$$

sowie die abgeleitete erweiterte Knotenfolge

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 < \theta_3 \leq \ldots \leq \theta_{21} < 1 = \theta_{22} = \theta_{23}, \quad \theta_\ell := \frac{\ell - 2}{20} \text{ für } \ell = 3, \ldots, 21. \tag{2}$$

Bestimmen Sie (mit Beweis) den interpolierenden *linearen* Spline $S(x)$ mit

$$S(\tau_\ell) = f(\tau_\ell), \qquad \ell = 1, \ldots, 21,$$

indem Sie die Entwicklungskoeffizienten c_i der Darstellung

$$S(x) = \sum_{i=1}^{21} c_i N_{i,k}(x)$$

bezüglich der obigen erweiterte Knotenfolge (2) angeben, und plotten Sie den resultierenden interpolierenden Spline mit Hilfe des Neville-Schemas bezüglich der Stützstellen $x_\ell := \ell\, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, 2^j - 1$ und $j = 6$.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu, dass die linearen B–Splines *nodal* bezüglich der gegebenen Stützstellen sind, d.h.

$$N_{i,k}(\tau_\ell) = \delta_{i,\ell}, \qquad \text{für alle } i, \ell = 1, \ldots, 21.$$

Zur Abgabe: Die Maximalpunktzahl bei dieser Programmieraufgabe wird nur vergeben, wenn folgendes abgegeben wurde:

1. Ein lauffähiges, kommentiertes und korrektes Programm per Mail an den jeweiligen Übungsgruppenleiter;
2. ein Ausdruck des Programmcodes;
3. ein Ausdruck der graphischen Ausgabe mit angemessener Beschriftung;
4. eine schriftliche Bearbeitung zu Aufgabe 18 e).

Zu jeder Programmieraufgabe, die einen Output generieren soll, legen Sie bitte eine .m-Datei mit dem Namen aufgabeN.m an, welche das in der Aufgabe N gestellte Problem löst (Bsp.: Aufgabe18_b.m löst Aufgabe 18b). Implementieren Sie das Neville-Schema als separate Matlab-Funktion und speichern es in eine separate m.-Datei (z.B. Neville.m). Weiterhin kann es sehr nützlich sein, sich je nach Bedarf weitere Hilfsfunktionen zu schreiben. Den gesamten Programmcode schicken Sie bitte bis zum Abgabetermin per e-Mail an Ihren jeweiligen Übungsleiter mit:

- Subject (Betreff): Uebung Name, Vorname Mat.-Nr.
- Body: Erläuternde Hinweise, falls nötig, ansonsten einfach leer lassen.
- Attachement: Sämtliche .m-Dateien, die zur Ausführung Ihres Programmes benötigt werden, archiviert als .zip- oder .rar-Datei.