Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 4

Ausgabe: Mittwoch, 16.5.2018
Abgabe: Mittwoch, 30.5.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 15: (10 Punkte, 2 + 5 + 3)
Die Rungefunktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

und es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. In dieser Aufgabe analysieren wir das Verhalten der Interpolationspolynome zu dieser Funktion auf dem Intervall $[-5,5]$. Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt nicht auf einer konkreten Implementierung der Interpolationsmethode, sondern auf einer angemessenen graphischen Darstellung der Ergebnisse.

(a) Berechnen Sie die Interpolationspolynome zu f mit $n+1 \in \{5,10,15\}$ äquidistanten Stützstellen $x_i = -5+ih$ mit $h = 10/n$ für $i = 0,\dots,n$. Stellen Sie alle drei Interpolationspolynome zusammen mit der Funktion f in einer Graphik dar.

(b) Die Tschebyscheff-Polynome $T_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sind definiert als $T_k(x) := \cos(k \arccos x)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgenden Grundeigenschaften dieser Polynome:

   (i) Die Tschebyscheff-Polynome erfüllen jeweils für $x \in [-1,1]$ die Rekursion

   $$\begin{aligned} T_0(x) &= 1; \\ T_1(x) &= x; \\ T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k > 1. \end{aligned}$$

   (ii) Der führende Koeffizient von T_k ist $a_k = 2^{k-1}$.

   (iii) $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$ für $\theta \in [0,\pi]$ und

   $$\max_{x\in[-1,1]} |T_k(x)| = 1.$$

   (iv) T_k hat $k+1$ Extremstellen $m_{\ell,k}$ in $[-1,1]$,

   $$m_{\ell,k} := \cos\frac{\ell\pi}{k},$$

   mit $T_k(m_{\ell,k}) = (-1)^\ell$, $\ell = 0,\dots,k$.

   (v) T_k hat k Nullstellen $x_{j,k} = \cos\left(\frac{2j+1}{2k}\pi\right)$ auf dem Intervall $[-1,1]$, $j = 0,\dots,k-1$.

(c) Berechnen Sie die Interpolationspolynome für die Rungefunktion (1) wie in (a), jedoch nun mit Stützstellen gewählt als die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome für $n+1 \in \{5,10,15\}$. Achten Sie dabei auf den Träger der Tschebyscheff-Polynome $[-1,1]$, d.h. eine Transformation ist erforderlich. Erstellen Sie zudem eine adäquate Graphik zum Vergleich der absoluten Fehler der Interpolationspolynome bei äquidistanten Stützstellen und Tschebyscheff-Stützstellen.

Geben Sie einen Ausdruck des Programmdurchlaufs und des vorbildlich kommentieren, perfekt dargestellten m-files sowie der zugehörigen Graphiken ab. Schicken Sie Ihren Programmcode zusätzlich per Email an Ihren jeweiligen Übungsgruppenleiter und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung4, Muster, Hans

Bitte erstellen Sie hierzu einen ZIP komprimierten Ordner mit den m-files. Die Email-Adressen der jeweiligen Übungsgruppenleiter finden Sie auf der Veranstaltungshomepage.

Aufgabe 16: (3 Punkte)

Sei $\Delta := \{\tau_i\}_{i=0,\dots,\ell+1}$ eine Knotenfolge mit $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{\ell+1} = b$. Die B-Splines $N_{i,k}(x)$ der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ bezüglich $\tau_i, \dots, \tau_{i+k}$ für $k = 1, \dots, \ell+1$ und $i = 0, \dots, \ell-k+1$ lassen sich nun rekursiv durch

$$\begin{aligned} N_{i,1}(x) &:= \chi_{[\tau_i,\tau_{i+1})}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ N_{i,k}(x) &:= \frac{x - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{\tau_{i+k} - x}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x) \end{aligned}$$

definieren. Beweisen Sie hiermit die folgenden Eigenschaften:

a) (Lokaler Träger) $\operatorname{supp} N_{i,k} \subseteq [\tau_i, \tau_{i+k}]$,

b) (Nichtnegativität) $N_{i,k}(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$,

c) $N_{i,k}(x)$ ist auf $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ein Polynom von der Ordnung k.

Aufgabe 17: (7 Punkte)

Seien eine Folge von Stützstellen $\Delta := \{\tau_i\}_{i=0,\dots,\ell+1}$ mit $a = \tau_0 < \tau_2 < \dots \tau_{\ell+1} = b$ und Stützwerte $\{f_i\}_{i=0,\dots,\ell+1}$ gegeben. Sei s die zughörige interpolierende *lineare* Splinefunktion, d.h.

$$s \in S_{2,\Delta} \qquad \text{mit } s(\tau_i) = f_i \quad \text{für } i = 0, \dots, \ell+1.$$

Bezeichne mit $C^1_\Delta([a,b])$ die Menge der stetigen Funktionen, die stückweise stetig differenzierbar sind, d.h.

$$C^1_\Delta([a,b]) := \left\{ f \in C^0([a,b]) : f|_{[\tau_i,\tau_{i+1})} \in C^1([a,b]) \quad \text{für } i = 0, \dots, \ell \right\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jede Funktion $f \in C^1_\Delta([a,b])$ mit $f(\tau_i) = f_i$ für $i = 0, \dots \ell+1$ gilt

$$\|f' - s'\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \|s'\|_2^2,$$

wobei f' die (stückweise) Ableitung bezeichnet,

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

die $L_2(a,b)$-Norm von f, und analog für s.

b) Für eine beliebige lineare Splinefunktion ψ bezüglich Δ und f, s wie in a) gilt die Abschätzung

$$\|f' - s'\|_2 \leq \|f' - \psi'\|_2.$$

c) Die interpolierende lineare Splinefunktion s löst das Variationsproblem

$$\min_{f \in C^1_\Delta([a,b])} \|f'\|_2 \quad \text{unter den Nebenbedingungen } f(\tau_i) = f_i \quad \text{für } i = 0, \dots, \ell+1.$$