Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 3

Ausgabe: Mittwoch, 2.5.2018
Abgabe: Mittwoch, 16.5.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 9: (5 Punkte)
Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{C}^{n\times n}$. ($\|\cdot\|$ muss nicht notwendigerweise eine Operatornorm sein.) Zeigen Sie, dass für jede diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(A).$$

Bemerkung: Dieses Verfahren zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes ist Ihnen als *Vektoriteration* bzw. *Potenzmethode* bekannt.

Aufgabe 10: (9 Punkte)
Zu $N \in \mathbb{N}$ definiere

$$T_{N-1}(x) := \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} c_j\, e^{ijx}, \quad c_j \in \mathbb{C} \right\}$$

die Menge der (komplexwertigen) trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq N-1$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet. Eine passende Interpolationsaufgabe ist nun: Zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_{N-1} \in [0, 2\pi[$ und zugehörigen Daten $f_0, \ldots, f_{N-1} \in \mathbb{C}$ finde ein trigonometrisches Polynom $p \in T_{N-1}$ mit

$$p(x_i) = f_i, \qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

a) Zeigen Sie, dass es genau ein $p \in T_{N-1}$ gibt, welches diese Interpolationsaufgabe löst.

b) Definiere $W_N := \exp(\frac{-2\pi i}{N})$. Zeigen Sie, dass hiermit gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} (W_N^{\ell-k})^j = \delta_{k,\ell}, \qquad \text{für } 0 \leq \ell, k \leq N-1.$$

c) Seien die Stützstellen äquidistant als $x_k := \frac{2\pi k}{N}$ für $k = 0, \ldots, N-1$ gewählt. Zeigen Sie, dass das trigonometrische Polynom $p \in T_{N-1}$ mit $p(x_k) = f_k$ für $k = 0, \ldots, N-1$ die Darstellung

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijx} \quad \text{mit} \quad c_j := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{jk} f_k$$

hat.

d) Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix},$$

nennt man *diskrete Fourier-Transformation*. Wieviele arithmetische Operationen benötigt diese Abbildung?

Aufgabe 11: (8 Punkte)

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $P \in \mathcal{P}_n$ (Polynome vom Grad maximal n) für $n = 2$ durch die drei Punkte (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2$, in den folgenden drei Darstellungen, wobei $(x_0, y_0) = (0, 2), (x_1, y_1) = (2, 3)$ und $(x_2, y_2) = (3, 8)$ gewählt ist:

a) $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^P x^j$ (monomiale Darstellung),

b) $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^L \ell_{jn}(x)$ mit $\ell_{jn}(x) := \prod_{\substack{k=0,\dots,n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$ (Lagrange–Darstellung),

c) $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^N \omega_j(x)$ mit $\omega_j(x) := \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$ (Newton–Darstellung).

Für festes $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)^T$ ist die Abbildung der Koeffizienten $\mathbf{a}^P := (a_1^P, a_2^P, a_3^P)^T$ auf die Werte $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)^T$ linear; ebenso auf die entsprechend definierten $\mathbf{a}^L$ und $\mathbf{a}^N$.

d) Bestimmen Sie die Matrizen zu diesen linearen Abbildungen.

e) Um von den y_i auf die Koeffizienten zu kommen, müssen diese Abbildungen invertiert werden. Was fällt auf?

Zum Lösen von Gleichungssystemen dürfen Sie Matlab oder ähnliches verwenden.

Hinweis:

Man erinnere sich, dass die Koeffizienten in der Lagrange-Darstellung gegeben sind als $a_j^L = f(x_j)$. Die Koeffizienten in der Newton-Darstellung sind über die *dividierten Differenzen* gegeben als $a_j^N = [x_0, \dots, x_j]f$, wobei die dividierten Differenzen $[x_0, \dots, x_j]f$ zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_j \in \mathbb{R}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} [x_k]f &:= y_k, \qquad k = 0, \dots, j \\ \left[x_0, \dots, x_j\right]f &:= \frac{[x_1, \dots, x_j]f - [x_0, \dots, x_{j-1}]f}{x_j - x_0}. \end{aligned}$$

definiert sind. Diese Eigenschaften dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Bei iterativen Verfahren zur Nullstellenbestimmung (z.b. dem Newton-Verfahren) tritt oft das Problem auf, dass man ein Polynom und seine Ableitung an einer festen Stelle x auswerten muss. Dies geschieht effizient durch Verwendung des *Hornerschemas*

$$p(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots a_n\xi^n = a_0 + \xi(a_1 + \xi(a_2 + \dots + \xi(a_{n-1} + \xi a_n)\dots)),$$

d.h. es werden sukzessive

$$a_n^{(0)} := a_n, \qquad a_i^{(0)} := a_i + x a_{i+1}^{(0)} \quad \text{für } i = n-1, \dots, 0$$

berechnet. Durch Koeffizientenvergleich sieht man, dass

$$p(\xi) = a_0^{(0)} + (\xi - x)\left(a_1^{(0)} + a_2^{(0)}\xi + \dots + a_n^{(0)}\xi^{n-1}\right)$$

gilt, sodass insbesondere $p(x) = a_0^{(0)}$ folgt. Das Hornerschema kann nun iterativ erneut benutzt werden, um auf die Darstellung

$$p(\xi) = a_0^{(0)} + a_1^{(1)}(\xi - x) + \dots + a_n^{(n)}(\xi - x)^n$$

zu kommen, sodass die Ableitungen von p in x unmittelbar gegeben sind durch

$$p^{(j)}(x) = j!\, a_j^{(j)}, \qquad j = 0, \dots, n.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die Koeffizienten $a_j^{(j)}$ mit Hilfe des *erweiterten Hornerschemas*

$$a_n^{(j)} := a_n^{(j-1)}, \qquad a_i^{(j)} := a_i^{(j-1)} + x a_{i+1}^{(j)}, \quad \text{für } i = n-1, \dots, j, \text{ mit } j \geq 1$$

berechnen lassen.

b) Bestimmen Sie mit dem erweiterten Hornerschema die Entwicklung des Polynoms

$$\tilde{p}(\xi) := 120 - 210\xi + 150\xi^2 - 59\xi^3 + 12\xi^4 - \xi^5$$

um $x = 2$. Stellen Sie alle im Schema auftretenden Koeffizienten $a_i^{(j)}$ tabellenförmig dar und bestimmen Sie so alle Ableitungen $\tilde{p}^{(j)}(2)$ (d.h. für alle $j \in \mathbb{N}_0$).

Aufgabe 13: (6 Punkte)
Beweisen Sie die *Leibniz-Regel*:
Für $g, h \in C^n([x_0, x_n])$ und einer beliebigen Knotenfolge $x_0 \leq \cdots \leq x_n$ gilt

$$[x_0, \ldots, x_n](gh) = \sum_{i=0}^{n} ([x_0, \ldots, x_i]g)([x_i, \ldots, x_n]h).$$

Die Leibniz-Regel für dividierte Differenzen benötigt man unter anderem, um zu zeigen, dass sich die B-Splines geschlossen über die dividierten Differenzen darstellen lassen.

Aufgabe 14: (8 Punkte)
Die Lagrange-Darstellung des interpolierenden Polynoms vom Grad N für die Punkte $\{x_j, f_j\}_{j=0}^{N}$ ist gegeben durch

$$p_N(x) := \sum_{j=0}^{N} f_j \ell_{jN}(x), \tag{1}$$

mit den Lagrange-Fundamentalpolynomen

$$\ell_{jN}(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

a) Zeigen Sie, dass die modifizierte Lagrange-Form

$$p_N^m(x) := \psi_N(x) \sum_{j=0}^{N} f_j \frac{\omega_{jN}}{x - x_j},$$

mit

$$\psi_N(x) := \prod_{i=0}^{N} (x - x_i), \qquad \omega_{jN} := \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N} (x_j - x_i)}, \quad j = 0, \ldots, N$$

äquivalent zur ursprünglichen Form (1) ist.

b) Begründen Sie, warum die Gleichheit

$$\sum_{j=0}^{N} \ell_{jN}(x) = \psi_N(x) \sum_{j=0}^{N} \frac{\omega_{jN}}{x - x_j} \equiv 1$$

gilt.

c) Zeigen Sie, dass die baryzentrische Form

$$p_N^b(x) := \frac{\sum\limits_{j=0}^{N} f_j \dfrac{\omega_{jN}}{x - x_j}}{\sum\limits_{j=0}^{N} \dfrac{\omega_{jN}}{x - x_j}} \tag{2}$$

mit den Gewichten ω_{jN} aus Teil a) äquivalent zur ursprünglichen Form (1) ist.

d) Der Vorteil der Darstellung (2) gegenüber der ursprünglichen Lagrange-Form (1) liegt nun darin, dass die Gewichte ω_{jN} unabhängig von der Auswertungsstelle x sind und deshalb a-priori berechnet werden können. Anschließend kann das Polynom effizient an mehreren Stellen ausgewertet werden. Nehmen Sie an, dass die Gewichte ω_{jN} bereits bestimmt sind und zählen Sie die Anzahl der benötigten Rechenoperationen für eine Polynomauswertung mittels Lagrange-Form (1) sowie mittels baryzentrischer Form (2). Geben Sie die Anzahl der Operationen in O-Notation in Abhängigkeit von N an.