Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 10

Ausgabe: Mittwoch, 4.7.2018
Abgabe: Mittwoch, 11.7.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 32: (10 Punkte)

In der Vorlesung Algorithmische Mathematik in Übung 9, Aufgabe 28, wurde das Differenzenverfahren zur approximativen Lösung der homogenen Poisson-Gleichung durchgeführt. Die Diskretisierung mit dem 5-Punkte-Differenzenstern und Schrittweite $h := \frac{1}{N}$ führte auf ein lineares Gleichungssystem von der Form

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

mit $\mathbf{u} := (u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, \ldots, u_{N-1,N-1})^T$, $\mathbf{f} := (f_{1,1}, f_{2,1}, \ldots, f_{N-1,N-1})^T$ und

$$A := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad n := (N-1)^2,$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ die Einheitsmatrix ist und

$$T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}.$$

a) Implementieren Sie das Gesamtschrittverfahren (Jacobi-Verfahren) (11.2.11) und lösen Sie damit das oben angegebene Gleichungssystem bzgl. der rechten Seite $\mathbf{f} \equiv \mathbf{1}$ und Schrittweite $N = 32$. Erstellen Sie einen Fehlerplot, in dem Sie die Anzahl der Iterationen k gegen den Fehler in der Maximumsnorm zwischen der exakten Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{u}^*$ und der approximativen Lösung $\mathbf{u}^\mathbf{k}$ plotten. Die exakte Lösung des Gleichungssystems können Sie sich in Matlab durch die links-Division ('A**f**') beschaffen. (Beachten Sie, dass die exakte Lösung des Gleichungssystems *nicht* der Lösung des Poisson-Problems entspricht.) Wählen Sie Ihre Achsenskalierung und die Anzahl der durchgeführten Iterationsschritte so aus, dass man den Fehlerverlauf hinreichend gut erkennen kann.

b) Implementieren Sie nun das SSOR-Verfahren (11.2.17) und lösen Sie damit das oben angegeben Gleichungssystem bzgl. der rechten Seite $\mathbf{f} \equiv \mathbf{1}$, Schrittweite $N = 32$ und für verschiedene Relaxationsparameter $\omega \in \{0.7, 1, 1.7, 1.9, 1.99, 2\}$. Ergänzen Sie den Fehlerplot aus a) durch die Fehlerplots bzgl. des SSOR-Verfahrens mit den verschiedenen Relaxationsparametern ω. Wählen Sie eine geeignete Beschriftung.

c) Wie sehen die Iterationsmatrizen für das Gesamtschrittverfahren und für das SSOR-Verfahren aus? Welches der Verfahren aus a) und b) konvergiert am schnellsten, und was ist der Grund dafür?

d) Implementieren Sie das CG-Verfahren aus Kapitel 11.4. Erstellen Sie einen Fehlerplot bzgl. des SSOR-Verfahrens mit $\omega = 1.9$ und bzgl. des CG-Verfahrens für $N = 64$. Welches der Verfahren konvergiert am schnellsten?

Zur Implementierung können Sie **Matlab** benutzen, wobei Sie das Jacobi-, SSOR- bzw. CG-Verfahren selbstständig implementieren sollen.

Aufgabe 33: (6 Punkte)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -\frac{1}{y(t)}\sqrt{1-y(t)^2}, \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

für $t \in [0,1]$.

a) Bestimmen Sie eine nicht-triviale Lösung des Anfangwertproblem (1), d.h. eine Lösung, die nicht identisch 1 auf $[0,1]$ ist.

b) Nun soll das Anfangwertproblem (1) mit dem expliziten Eulerverfahren numerisch gelöst werden. Zeigen Sie, dass sich für alle Zeitpunkte t_j und Schrittweiten $h = \frac{1}{N}$ die diskrete Lösung $y_h = 1$ ergibt, d.h.

$$y_h(t_j) = 1 \quad \text{für alle } t_j = jh,\ j = 0,\dots,N.$$

Wie lässt sich der Unterschied zur Lösung aus a) erklären?

c) Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren mit Matlab und lösen Sie damit das Anfangswertproblem (1) für $t \in [0.1, 0.9]$ mit Anfangswert $y(0.1) = \sqrt{0.99}$ und $N = 100$ Zeitschritten. Plotten Sie diese Approximation zusammen mit der Lösung aus Teil a) eingeschränkt auf $[0.1, 0.9]$. Was fällt hier im Vergleich zu Aufgabenteil b) auf? Begründen Sie ihre Beobachtung.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Betrachten Sie den allgemeinen Ansatz

$$\Phi(t,y) = \gamma_1 f(t,y) + \gamma_2 f(t+\alpha h, y+\beta h f(t,y))$$

einer Verfahrensfunktion eines Einschrittverfahrens. Zeigen Sie, dass durch keine Wahl von $\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta$ die Konsistenzordnung 3 erreicht werden kann.

Hinweis:
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf die erste Seite der Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer. Den gesamten Programmcode schicken Sie bitte bis zum Abgabetermin per E-Mail an Ihren jeweiligen Übungsleiter mit:

- Subject (Betreff): Uebung Name, Vorname Mat.-Nr.
- Body: Erläuternde Hinweise, falls nötig, ansonsten einfach leer lassen.
- Attachement: Sämtliche .m-Dateien, die zur Ausführung Ihres Programmes benötigt werden, archiviert als .zip- oder .rar-Datei. Bitte benennen Sie die Dateien mit Nachname.zip bzw. Nachname.rar .