Prof. Dr. Angela Kunoth
Sandra Boschert
Jose Licon

Numerische Mathematik
SoSe 2018

Übungsblatt 1

Ausgabe: Mittwoch, 11.4.2018
Abgabe: Mittwoch, 18.04.2018 bis 16 Uhr im Briefkasten vor dem Eingang Gyrhofstr. 8a.

Aufgabe 1: (4 Punkte, 2+2)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

a) Ist die Matrix A unitär diagonalisierbar, d.h. existiert eine unitäre Matrix U, so dass U^*AU eine Diagonalmatrix ist?

b) Die orthogonale Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

sei Ihnen bekannt. Geben Sie die Schur'sche Normalform $R = Q^T AQ$ gemäß (5.2.8) im Skript an.

Aufgabe 2: (6 Punkte, 4+2)
Die Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Der Block $A \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ sei invertierbar, sei $B \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$, $C \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1}$ und $D \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$. Zeigen Sie:

a) $\det(M) = \det(A)\cdot\det(S)$, wobei $S = D - CA^{-1}B$ ist.
Hinweis: Führen Sie eine LR-Zerlegung auf Blockebene durch.

b) Die Menge der Eigenwerte $\sigma(M) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ von M wird auch als Spektrum von M bezeichnet. Zeigen Sie, dass für $C = 0$

$$\sigma(M) = \sigma(A) \cup \sigma(D)$$

gilt.

Aufgabe 3: (6 Punkte, 2+2+2)
Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Mit $tr(X) := \sum_{i=1}^n X_{ii}$ bezeichnen wir die Spur einer Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

a) Beweisen Sie $tr(AB) = tr(BA)$.

b) Zeigen Sie, dass die Spur unter zyklischen Vertauschungen invariant ist, d.h.

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA).$$

c) Seien $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, N$ die Eigenwerte von A. Zeigen Sie:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Skizzieren Sie die Gerschgorin-Kreise für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & i & 2 \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix}.$$

Hinweis:
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen. Auf die erste Seite der Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.