



UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Wissenschaftliches Rechnen III

(Ausarbeitung von Corinna Dohle im SS 2009)
(überarbeitet von Christian Mollet im SS 2013)

nach einer Vorlesung von

PROF. DR. ANGELA KUNOTH

im Sommersemester 2013
an der

UNIVERSITÄT PADERBORN

14. November 2013

Prof. Dr. Angela Kunoth
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
33098 Paderborn

kunoth@math.uni-paderborn.de

<http://www2.math.uni-paderborn.de/ags/kunoth/group/angelakunoth.html>

Tel: (05251) 60 2711/2713 (Sekretariat Frau Sulak-Klute)

Fax: (05251) 60 2715

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Einleitung und Motivation	3
1.1 Motivation	3
1.2 Multiresolution von L_2	6
1.3 Normäquivalenzen für Sobolevräume H^s	18
1.4 Vorkonditionierung	21
1.5 Wavelets auf Gebieten $(0, 1)^d$	24
2 Multigridmethoden	28
2.1 Multigridmethoden für Variationsaufgaben	28
2.2 Konvergenz von Multigridverfahren (klassische Theorie)	34
2.3 Konvergenz bei mehr als zwei Level	42
2.4 Nested Iteration (Geschachtelte Iteration, Kaskadisches Mehrgitter)	47
2.5 Analyse von Multigridmethoden über Unterraumzerlegungen	51
2.6 BPX-Vorkonditionierung für Isogeometrische Analyse	57
3 Kontrollprobleme mit partiellen Differentialgleichungen	58
3.1 Beschränkte Optimierungsprobleme	58
3.2 Numerische Lösung parabolischer Differentialgleichungen	58
3.3 Adaptive Waveletverfahren	58

Vorwort

Innerhalb des Vorlesungszyklus „Wissenschaftliches Rechnen“ wurden bisher folgende Themen behandelt.

In *Wissenschaftliches Rechnen I* wurden iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, speziell das *cg-Verfahren*, behandelt. Außerdem ging es um die Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODEs).

In *Wissenschaftliches Rechnen II* war die Numerik partieller Differentialgleichungen (PDEs) das zentrale Thema. Zunächst wurden lineare PDEs 2. Ordnung klassifiziert in:

- (A) *zeitunabhängige/stationäre partielle Differentialgleichungen in Form elliptischer Randwertprobleme*: Standardbeispiel ist hier die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit Dirichlet-Randdaten

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene und beschränkte Menge sei.

- (B) *zeitabhängige partielle Differentialgleichungen in Form parabolischer Anfangs- oder Randwertprobleme*: Gleichungen dieser Art beschreiben typischerweise Diffusionsprozesse. Ein wichtiges Beispiel ist der Wärmeleitungsoperator

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T],$$

wobei Ω wie oben gewählt sei.

- (C) *zeitabhängige partielle Differentialgleichungen in Form hyperbolischer Erhaltungssätze*: Bekannte Beispiele sind hier die Wellengleichung und die Burgers-Gleichung.

Für die Numerik wird häufig (B) auf (A) zurückgeführt, daher wurde in der restlichen Vorlesung überwiegend die Problemklasse (A) behandelt.

Ein weiteres Thema waren Variationsansätze für lineare elliptische PDEs. Hierbei wurden schwache Formulierungen und Sobolevräume thematisiert. Dies führte auf die lineare Operatorgleichung

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{*}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$.

Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen partieller Differentialgleichungen wurde mit dem *Satz von Lax-Milgram* geklärt. Weiterhin wurden Finite-Elemente-Methoden vorgestellt, sowie Approximationssätze und Fehlerabschätzungen der folgenden Form behandelt:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

mit Diskretisierungsparameter $h \sim 2^{-j}$ (z.B. Gitterweite). Daraus ergeben sich dann $N \sim 2^{jd}$ Freiheitsgrade.

Anschließend wurden Differenzenverfahren diskutiert.

In dieser Vorlesung *Wissenschaftliches Rechnen III* werden wir Multiskalen- und Waveletmethoden für elliptische PDEs kennenlernen. Leitthema hierbei ist die „schnelle“ und „effiziente“ numerische Lösung für Systeme der Form (*).

Für Diskretisierungen auf uniformen Gittern werden Multigrid-, Multilevel- und Waveletmethoden zur schnellen Lösung linearer Gleichungssysteme vorgestellt. Wir werden sehen, dass diese als asymptotisch optimale Vorkonditionierer für die Matrix des Systems (\star) interpretiert werden können. Solche optimalen Vorkonditionierer zusammen mit einer Nested-Iteration-Strategie von grob nach fein ermöglichen die Berechnung der Lösung auf einem feinsten Gitter bis Diskretisierungsfehlergenauigkeit (des feinsten Gitters) in asymptotisch optimaler Komplexität (des feinsten Gitters), siehe Abschnitt 2.4.

Des Weiteren werden adaptive Verfahren behandelt. Ziel hierbei ist es, ein Problem des Typs (A) oder (B) mit minimal wenigen Freiheitsgraden zu lösen. Insbesondere werden wir adaptive Finite Elemente und adaptive Wavelets kennenlernen und uns mit der Konvergenztheorie beschäftigen.

Schließlich werden Diskretisierungsverfahren für parabolische PDEs (Finite Differenzen; Semidiskretisierung im Ort mit Finiten Elementen) diskutiert.

1 Einleitung und Motivation

In diesem Kapitel geht es um schnelle Löser für elliptische PDEs auf uniformen Gittern mittels Multiskalenanalyse.

1.1 Motivation

(a) Betrachten wir die Variationsformulierung eines linearen elliptischen Differentialoperators $A : H^k \rightarrow H^{k-r}$ der Ordnung $r \neq 0$, wie wir sie schon aus der Vorlesung *Wissenschaftliches Rechnen II, Kapitel 2.3*, kennen. Dieser liefert einen Isomorphismus

$$\|Av\|_{H^{k-r}} \sim \|v\|_{H^k} \quad \forall v \in H^k.$$

Konkret sei das Problem

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit den homogene Randwerten

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, gegeben. Sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann ist für $w \in H^1$ durch die Bilinearform

$$a(v, w) := \int_{\Omega} (\nabla v \circ \nabla w + vw) \, dx =: \langle Av, w \rangle$$

ein elliptischer Differentialoperator $A : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$ zweiter Ordnung gegeben.

(b) Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Operator $Lu := -\Delta u + u$, $L : \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^{k-r}$ zu betrachten, der die Ordnung $r = 2$ hat, erinnere an *Wissenschaftliches Rechnen II, Kapitel 3*.

Im Fall (b) wird das Problem durch ein Differenzenverfahren diskretisiert. Für $d = 2$ ergibt sich der Differenzenstern

$$\Delta \approx \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für $\mathbf{u} = (\dots, u_{ik}, \dots)^T$, $u_{ik} \approx u(ih, kh)$, der Form $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ mit

$$A := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ -I & & & T \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Im Fall (a) approximiert man den Raum $H^1(\Omega)$ für eine Diskretisierung mit stückweise linearen Finiten Elementen durch einen endlichdimensionalen Unterraum $V_h \subset H^1(\Omega)$. Es sei $V_h = \text{span} \{\varphi_i \mid i = 1, \dots, N\}$, $N \sim 2^{jd}$. Dann führt der Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y)$$

zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten u_i auf das lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$ und $A_{ik} = a(\varphi_k, \varphi_i)$, wobei die Basisfunktionen φ_i lokalen Träger haben.

A hat in beiden Fällen folgende strukturelle Eigenschaften:

1 Einleitung und Motivation

- (i) Besonders für Raumdimensionen $d \geq 2$ liegen hochdimensionale Probleme vor, also $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, wobei N die Anzahl der Unbekannten ist;
- (ii) A ist dünnbesetzt (sparse), d.h. A hat $\mathcal{O}(N)$ Einträge;
- (iii) A ist hochstrukturiert;
- (iv) A ist symmetrisch positiv definit.

Aus diesen Gegebenheiten bietet sich eine iterative Lösung des Systems – vorzugsweise mit dem cg-Verfahren – an. Dieses konvergiert in unserem Fall, da A symmetrisch positiv definit ist. Allerdings ist die Konvergenz bedingt durch den Fehlerreduktionsfaktor

$$\frac{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1}$$

langsam für Probleme mit großer Konditionszahl $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$. In den beiden obigen Diskretisierungen ist $\kappa_2(A) = \mathcal{O}(h^{-r})$ unabhängig von der Raumdimension d . Die Idee der *Vorkonditionierung* besteht darin, anstelle der Basisiteration

$$\mathbf{u} \leftarrow (I - A)\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{u} \leftarrow (I - CA)\mathbf{u} + C\mathbf{f} \tag{1.1.1}$$

zu verwenden. Hierbei heißt die Matrix C *Vorkonditionierer*, falls

- $C \approx A^{-1}$, so dass $\kappa_2(CA) \ll \kappa_2(A)$ und
- C schnell zu berechnen und anzuwenden ist.

Ist die Anzahl der Unbekannten N , so sollte eine „schnelle“ Aufstellung und Anwendung von C im optimalen Fall höchstens $\mathcal{O}(N)$ arithmetische Operationen benötigen. Für einen *asymptotisch besten* oder *optimalen* Vorkonditionierer sollte

$$\kappa_2(CA) = \mathcal{O}(1)$$

unabhängig von der Diskretisierung (N, h) gelten.

In *Wissenschaftliches Rechnen I* wurde C dazu benutzt, um überhaupt Konvergenz des iterativen Verfahrens für beliebiges A zu gewährleisten.

Sei $A = L + D + U$ eine Zerlegung von A in eine obere und untere Dreiecksmatrix, sowie eine Diagonalmatrix.

Mögliche Wahlen von C :

- $C = D^{-1}$ (Jacobi- oder Gesamtschrittverfahren);
- $C = (D + L)^{-1}$ (Gauß-Seidel- oder Einzelschrittverfahren).

Weitere Verfahren sind Relaxationsverfahren wie

- das SOR-Verfahren: man setzt mit $1 < \omega < 2$ und $C = (D + L)^{-1}$ die Linearkombination

$$D\mathbf{x}^{k+1} = \omega(-L\mathbf{x}^{k+1} - U\mathbf{x}^k + \mathbf{f}) + (1 - \omega)D\mathbf{x}^k$$

an.

- das SSOR–Verfahren: mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\leftarrow (D - \omega L)^{-1}(\omega \mathbf{b} + \omega U \mathbf{x} - (\omega - 1) D \mathbf{x}) \\ \mathbf{x} &\leftarrow (D - \omega U)^{-1}(\omega \mathbf{b} + \omega L \mathbf{x} - (\omega - 1) D \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

ergibt sich

$$C := (\omega(2 - \omega))^{-1}(D - \omega L)D^{-1}(D - \omega U).$$

Diese Vorkonditionierer sind einfach, aber häufig wirksam.

Wir betrachten noch die ILU–Vorkonditionierung (Incomplete LU Decomposition). Hier wird durch eine unvollständige Cholesky–Zerlegung eine näherungsweise Inverse von A berechnet. Die Idee hierbei ist, die Matrix L der Cholesky–Zerlegung $A = LL^T$ nur auf dem Besetzungsmuster von A zu berechnen. Sei A die Matrix, die bei der Diskretisierung des Laplace–Operators mit dem Standard–Fünf–Punkte–Stern entsteht. Dann hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & * & & \\ * & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & * \\ * & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & * \\ * & & & \ddots & \ddots & * \\ & \ddots & & & \ddots & \ddots & * \\ & & * & & & & * \\ & & & & * & & * \end{pmatrix}.$$

Entsprechend wird dann L in der Form

$$L = \begin{pmatrix} * & & & & & \\ * & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ * & & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & * \\ & & & & & \ddots & * \\ & & & & & & * \end{pmatrix}$$

berechnet. Dies ist aus heuristischer Sicht „häufig günstiger“ als SSOR–Vorkonditionierung. Für spezielle Operatoren der Ordnung 2 lässt sich eine leichte Verbesserung von $\kappa_2(CA) \sim h^{-1}$ erreichen (Gustafsson 1978, Axelson und Barter 1984, Details siehe [GL]). Dies bedeutet eine Entkoppelung von Herkunft und Lösung von Matrixgleichungen. Ein verbesserter numerischer Algorithmus entsteht allein aus der Struktur von A . Der Vorteil ist, dass insgesamt wenig Maschinerie verwendet wird. Allerdings liegen wenig Beweise vor, da kein funktionalanalytischer Hintergrund verwendbar ist.

Als Abbruchkriterium sind möglich:

$$\|A\mathbf{u}_k - \mathbf{f}\|_{\ell^2} \leq C \cdot 10^{-4} \|\mathbf{f}\|_{\ell^2}$$

oder

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}\|_{\ell^2} \leq C \cdot 10^{-2}.$$

Ein weiterer Ansatz ist die Berechnung einer (W)SPAI ((Wavelet) Sparse Approximate Inverse). Hierbei wird die FWT (Fast Wavelet Transformation) angewendet; die Matrix erhält dann eine sogenannte „Fingerbandstruktur“.

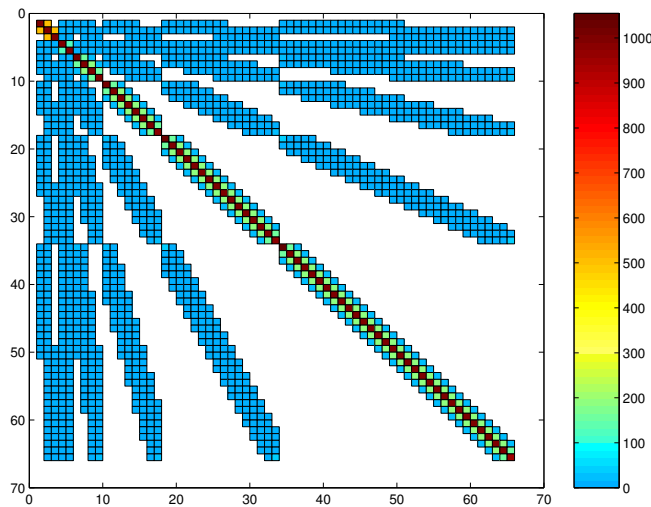


Abbildung 1: Fingerbandstruktur

Die Idee ist, A^{-1} auf ein Nichtnullenmuster von A in Waveletdarstellung zu approximieren. Üblicherweise gibt es hierzu keine Beweise.

Eine weitere Idee sind H -Matrizen, welche approximierte LU-Zerlegungen sind (Hackbusch 1999, Bebendorf 2005, Börm, Grasedyck 2007/2008).

Wir beschäftigen uns im nächsten Kapitel mit Multiskalenvorkonditionierern basierend auf schneller Wavelet-Transformation.

1.2 Multiresolution von L_2

Eine Multiresolution eines Hilbertraums \mathcal{H} bietet den Rahmen zur Konstruktion von Wavelets. Man wähle z.B. $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ in [Mallat 1989] oder, im Hinblick auf Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen, später auch $\mathcal{H} = H^1(\Omega)$ oder $\mathcal{H} = H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Jetzt betrachten wir zunächst $\mathcal{H} = L_2$.

Hier wird der Rahmen so gesteckt, dass die Konstruktion auf beschränkte Gebiete anwendbar ist, siehe dazu [CDP]. Der klassische Zugang findet auf \mathbb{R} statt und benutzt die Fouriertransformation als wesentliches Hilfsmittel.

In *Wissenschaftliches Rechnen II* war der wesentliche Parameter die uniforme Gitterweite h . Jetzt haben wir es mit einer Hierarchie von Gittern mit unterschiedlichen h 's zu tun. Es ist günstiger, $h = h_j$ durch 2^{-j} zu ersetzen, mit $j \geq j_0$. Dabei ist $j_0 \in \mathbb{Z}$ das größte Verfeinerungslevel, d.h. 2^{-j_0} entspricht der größten Diskretisierung. Die Wahl von j_0 hängt von Ω ab.

Definition 1.2.1. Eine *Multiresolution* $\mathcal{S} = \{S_j\}_{j \geq j_0}$ von L_2 besteht aus einer Folge abgeschlossener Unterräume S_j von L_2 mit

$$S_{j_0} \subset S_{j_0+1} \subset \dots \subset S_j \subset \dots \subset L_2,$$

wobei

$$\overline{\bigcup_{j=j_0}^{\infty} S_j}^{L_2} = L_2.$$

Hierbei bezeichnet j das *Auflösungslevel* oder die *Auflösungsstufe* (*level of resolution/refinement level*) und die S_j werden *Ansatzräume* (*multiresolution spaces*) genannt.

Definition. Für jede endliche oder abzählbare Menge von Funktionen Θ bezeichne $S(\Theta) := \text{span}\{\Theta\} = \{f : f = \sum_{k \in \mathbb{I}} c_k \Theta_k, \text{ mit } c_k \in \mathbb{R}\}$, wobei \mathbb{I} eine endliche Indexmenge ist. Die Ansatzräume S_j haben typischerweise die Form

$$S_j := S(\Phi_j), \quad (1.2.2)$$

wobei $\Phi_j := \{\phi_{j,k} \mid k \in \Delta_j\}$ eine Basis für S_j ist. Außerdem ist Δ_j eine endliche Indexmenge und die Menge $\{\Phi_j\}_{j \geq j_0}$ ist *gleichmäßig stabil* (*uniformly stable*), d.h.

$$\|\mathbf{c}\|_{\ell_2(\Delta_j)} \sim \|\mathbf{c}^T \Phi_j\|_{L_2} \quad \text{für alle } \mathbf{c} = \{c_k\}_{k \in \Delta_j} \in \ell_2(\Delta_j) \quad (1.2.3)$$

ist unabhängig von j . Hierbei bedeutet $\mathbf{c}^T \Phi_j := \sum_{k \in \Delta_j} c_k \phi_{j,k}$.

Solche Basen für S_j heißen *Generatoren* oder *Einzelskalenasen* (*single scale basis*), da sie nur auf Level j leben.

Standardbeispiele für $\{\phi_{j,k} \mid k \in \Delta_j\}$:

- kardinale B-Splines auf uniformer Unterteilung von $I \subseteq \mathbb{R}$
- Finite Elemente auf uniformer Triangulierung von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Es ist zu beachten, dass die Skalierung der Funktionen $\phi_{j,k}$ so ist, dass

$$\|\phi_{j,k}\|_{L_2} \sim 1 \quad (1.2.4)$$

gilt, also unabhängig von j ist. Dies folgt direkt aus (1.2.3) für $c_k = \delta_{j,k}$, wobei $\|\phi_{j,k}\|_{L_2} = (\int |\phi_{j,k}(x)|^2 dx)^{1/2} = \int |\phi(y)|^2 dy = 1$.

Beispiel 1.2.5. Auf \mathbb{R} werden alle $\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ durch Dilatation und Translation einer Funktion ϕ erzeugt.

Sei ϕ etwa eine Hutfunktion mit $\text{supp } \phi = [0, 2]$, dann ist $\text{supp } \phi_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+2)]$.

Allgemein gilt für ϕ mit $\text{supp } \phi \subseteq [\ell_1, \ell_2]$:

$$\text{supp } \phi_{j,k} = [2^{-j}(k + \ell_1), 2^{-j}(k + \ell_2)].$$

Betrachte auf \mathbb{R} die Funktion ϕ , die implizit durch die *Verfeinerungsgleichung* (*refinement relation*)

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.6)$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet $\mathbf{a} := \{a_k : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ die *Maske* oder die *Maskenkoeffizienten* für ϕ .

Man kann zeigen:

$$\text{supp } \mathbf{a} = [\ell_1, \ell_2] \quad \Leftrightarrow \quad \text{supp } \phi := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}} \subseteq [\ell_1, \ell_2], \quad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.7)$$

Wir normieren die Maskenkoeffizienten so, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} = 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = 2, \quad (1.2.8)$$

bzw.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x - k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.8a)$$

1 Einleitung und Motivation

gilt.

Beachte, dass mit (1.2.7) folgt:

$$\text{supp } \phi = [\ell_1, \ell_2] \Rightarrow \text{supp } \phi_{j,k} = [2^{-j}(k + \ell_1), 2^{-j}(k + \ell_2)], \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.9)$$

Beispiel 1.2.10. Sei $\phi = N_m$ kardinaler B-Spline der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\text{supp } N_1$ so, dass dieser bei 0 beginnt, d.h. $\text{supp } N_1 = [0, 1]$.

Wegen $N_m = N_{m-1} * N_1$ (Faltung) folgt

$$\text{supp } N_m = [0, m]. \quad (1.2.11)$$

Dann gilt für die Maskenkoeffizienten \mathbf{a} für N_m : $\text{supp } \mathbf{a} = [0, m]$, d.h. $a_\ell = 0$ für $\ell < 0$ und $\ell > m$. Für B-Splines gilt die Verfeinerungsgleichung

$$N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N_m(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.12)$$

das heißt $a_k = 2^{1-m} \binom{m}{k}$, $k = 0, \dots, m$.

Spezialfälle verschiedener Ordnungen m :

m	Träger	B-Spline	Glattheit	Maske
1	[0,1]	char. Funktionen	L_2	$a_0 = a_1 = 1$
2	[0,2]	Hutfunktionen	\mathcal{C}^0	$a_0 = a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = 1$
3	[0,3]	stückw. quadr. Funktionen	\mathcal{C}^1	$a_0 = a_3 = \frac{1}{4}, a_1 = a_2 = \frac{3}{4}$
4	[0,4]	stückw. kubische Funktionen	\mathcal{C}^2	$a_0 = a_4 = \frac{1}{8}, a_1 = a_3 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{4}$

Algorithmus 1.2.13. Man berechne ϕ gegeben durch (1.2.6) mit Normierung (1.2.8) mit gegebenem \mathbf{a} auf $2^{-j}k$, $j \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Dabei wird wie folgt vorgegangen:

1. Input: \mathbf{a} mit (1.2.6) und $\text{supp } \mathbf{a} := [0, m]$.
2. Schreibe die Verfeinerungsgleichung als Eigenwertproblem durch Substitution $r := 2x - k$ wie folgt:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^m a_k \phi(2x - k) \iff \phi(x) = \sum_r a_{2x-r} \phi(r).$$

Wähle $x \in \mathbb{Z}$ und beachte $\phi(0) = 0 = \phi(m)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \sum_r a_{2-r} \phi(r) \\ \phi(2) &= \sum_r a_{4-r} \phi(r) \\ &\vdots \\ \phi(m-1) &= \sum_r a_{2(m-1)-r} \phi(r) \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\Phi = A\Phi, \quad (1.2.14)$$

wobei $\Phi = (\phi(1), \dots, \phi(m-1))^T$ und A die Maskenkoeffizienten enthält.

Es ist Φ also ein Eigenvektor von A mit zugehörigem Eigenwert 1. Dieser ist zusammen mit der Normierung (1.2.8) eindeutig bestimmt.

3. Die Berechnung von Φ ist eindeutig bestimmt, d.h. ϕ ist auf \mathbb{Z} bekannt.

Wähle $x \in \mathbb{Z}/2$, also $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, und wende (1.2.6) an. Somit erhält man ϕ auf $\mathbb{Z}/2$.

Wähle $x \in \mathbb{Z}/4$ und wende erneut (1.2.6) an.

Fahre so fort.

Damit ist ϕ auf $2^{-j}k, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ berechenbar.

Beispiel 1.2.15. [Übungsaufgabe] Man berechne ϕ an dyadischen Stellen $2^{-j}k, j \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ und plote ϕ für

(a) $\phi = N_m$, Maskenkoeffizienten aus (1.2.13).

(b) $\phi = D_N$, mit Daubechies-Skalierungsfunktion

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x-k) dx = \delta_{0,k} \quad L_2\text{-orthogonal}$$

und $\text{supp } D_N = [0, 2N - 1]$.

Zusammengefasst: auf \mathbb{R} ist ϕ aus der Verfeinerungsgleichung (1.2.6) bekannt.

Auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert man $\phi_{j,k}$ wie oben. Am Rand müssen allerdings Modifikationen vorgenommen werden, siehe [DKU'99].

Wesentlich ist im Folgenden, dass wir stets nur Generatorbasen betrachten, bei denen

$$\text{diam}(\text{supp } \phi_{j,k}) \sim 2^{-j} \quad \text{für alle } k \in \Delta_j \quad (1.2.16)$$

ist. Wegen $S_j \subset S_{j+1}$ und $S_j = S(\Phi_j)$ folgt, dass die $\phi_{j,k}$ sich als

$$\phi_{j,k}(x) = \sum_{r \in \Delta_{j+1}} m_{r,k} \phi_{j+1,r}(x) \quad \text{für alle } k \in \Delta_j \quad (1.2.17)$$

schreiben lassen. Vergleiche dazu die Herleitung der $m_{r,k}$ aus der Verfeinerungsgleichung (1.2.6), wonach sich die $\phi_{j,k}$ darstellen lassen als

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{-1/2} \sum_r a_{r-2m} \phi_{j+1,r}(x),$$

d.h. $m_{r,k} = 2^{-1/2} a_{r-2k}$, wobei die a_k die Maskenkoeffizienten sind.

Eine Matrix-Vektor-Schreibweise von (1.2.17) ist die Verfeinerungsgleichung (scaling relation)

$$\Phi_j = M_{j,0}^T \Phi_{j+1}, \quad (1.2.18)$$

wobei $M_{j,0} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_{j+1}) \times (\#\Delta_j)}$ und $(M_{j,0})_{rk} := m_{r,k}$. Eine Menge von Funktionen, die einer solchen Bedingung genügen, heißt *verfeinerbar* (*refinable*).

Beispiel 1.2.19. (a) Sei $\phi = \chi_{[0,1)}(x)$ B-Spline der Ordnung 1 ($a_0 = a_1 = 1$). Dann ist

$$M_{j,0} = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2^{j+1} \times 2^j},$$

Bemerkung. Wenn beide Transformationen benötigt werden, sieht man, warum es wichtig ist, dass sowohl M_j als auch $G_j = M_j^{-1}$ dünn besetzt sind.

Sei nun J das feinste Auflösungslevel. Wiederholung des obigen Prozesses ergibt

$$S_J = S(\Phi_J) = S(\Phi_{j_0}) \oplus \bigoplus_{j=j_0}^{J-1} S(\Psi_j). \quad (1.2.33)$$

Daher kann jede Funktion $v \in S(\Phi_J)$ in *Einzelskalendarstellung*

$$v = \mathbf{c}_J^T \Phi_J = \sum_{k \in \Delta_J} c_{J,k} \phi_{J,k} \quad (1.2.34)$$

oder in *Multiskalendarstellung*

$$v = \mathbf{c}_{j_0}^T \Phi_{j_0} + \mathbf{d}_{j_0}^T \Psi_{j_0} + \dots + \mathbf{d}_{J-1}^T \Psi_{J-1} \quad (1.2.35)$$

bezüglich der *Multiskalen-* oder *Waveletbasis*

$$\Psi^J := \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{J-1} \Psi_j =: \bigcup_{j=j_0-1}^{J-1} \Psi_j \quad (1.2.36)$$

dargestellt werden.

Vorteile der Einzelskalendarstellung sind, dass die Koeffizienten \mathbf{c}_J einfacher zu berechnen und auszuwerten sind (Messwerte, Pixel auf feinstem Gitter) und darüberhinaus eine geometrische Relevanz haben.

Vorteile der Multiskalendarstellung sind, dass sie Detailinformationen zwischen den Level enthält und die *Größe* der Koeffizienten relevant für die *Exaktheit* der Darstellung ist (\mathbf{d}_j sind Detailkoeffizienten).

Beide Darstellungen sind nützlich und werden daher in der Praxis auch beide verwendet.

Die Transformation zwischen

$$\mathbf{d}^J := (\mathbf{c}_{j_0}, \mathbf{d}_{j_0}, \dots, \mathbf{d}_{J-1})^T \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_J \quad (1.2.37)$$

erfolgt mittels der *Wavelet-Transformation*

$$T_J := T_{J,J-1} \cdots T_{J,j_0} : \ell_2(\Delta_J) \rightarrow \ell_2(\Delta_J) \quad (1.2.38)$$

gemäß $\mathbf{d}^J \mapsto \mathbf{c}_J$ mit $T_J \mathbf{d}^J = \mathbf{c}_J$, wobei

$$T_{J,j} := \begin{pmatrix} M_j & 0 \\ 0 & I_{\#\Delta_j - \#\Delta_{j+1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_j) \times (\#\Delta_j)}. \quad (1.2.39)$$

Eine schematische Visualisierung von T_J ist das *Pyramid-Schema*:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{c}_{j_0} & \xrightarrow{M_{j_0,0}} & \mathbf{c}_{j_0+1} & \xrightarrow{M_{j_0+1,0}} & \mathbf{c}_{j_0+2} & \cdots & \mathbf{c}_{J-1} & \xrightarrow{M_{J-1,0}} & \mathbf{c}_J \\ \mathbf{d}_{j_0} & \nearrow M_{j_0,1} & \mathbf{d}_{j_0+1} & \nearrow M_{j_0+1,1} & & & \mathbf{d}_{J-1} & \nearrow M_{J-1,1} & . \end{array} \quad (1.2.40)$$

Dies ergibt sich aus $\Phi_j^T \mathbf{c}_j + \Psi_j^T \mathbf{d}_j = \Phi_{j+1}^T (M_{j,0} \mathbf{c}_j + M_{j,1} \mathbf{d}_j) = \Phi_{j+1}^T \mathbf{c}_{j+1}$.

Die inverse Transformation erfolgt durch

$$T_J^{-1} = T_{J,j_0}^{-1} \cdots T_{J,J-1}^{-1} \quad (1.2.41)$$

1 Einleitung und Motivation

mit

$$T_{J,j}^{-1} = \begin{pmatrix} G_j & 0 \\ 0 & I(\#\Delta_J - \#\Delta_{j+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(\#\Delta_J \times \#\Delta_J)$$

und entsprechendem Pyramid-Schema

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{c}_J & \xrightarrow{G_{J-1,0}} & \mathbf{c}_{J-1} & \xrightarrow{G_{J-2,0}} & \mathbf{c}_{J-2} & \cdots & \mathbf{c}_{j_0+1} & \xrightarrow{G_{j_0,0}} & \mathbf{c}_{j_0} \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & \\ & G_{J-1,1} & \mathbf{d}_{J-1} & G_{J-2} & & & & G_{j_0,1} & \mathbf{d}_{j_0}. \end{array}$$

Satz 1.2.42. Seien M_j und $G_j = M_j^{-1}$ gleichmäßig dünn besetzt, d.h. M_j und G_j lassen sich in $\mathcal{O}(\#\Delta_{j+1})$ arithmetischen Operationen anwenden. Dann lässt sich die Anwendung der Wavelet-Transformation T_J oder der inversen Wavelet-Transformation T_J^{-1} über das Pyramid-Schema in $\mathcal{O}(\#\Delta_J) = \mathcal{O}(\dim S(\Phi_J))$ für jedes J durchführen (die schnelle Wavelet-Transformation hat einen Aufwand $\mathcal{O}(N)$ bei N Unbekannten).

Beachte, dass T_J nicht explizit aufgestellt wird, man müsste sonst Matrizen mit $\mathcal{O}(N_J \log N_J)$ Einträgen berechnen.

Beweis: Nach Definition (1.2.38) ist

$$T_J = T_{J,J-1} T_{J,J-2} T_{J,J-3} \cdots T_{J,j_0}$$

und $\frac{\#\Delta_{j+1}}{\#\Delta_j} \sim 2^n$. Mit $N_j := \#\Delta_j$ ist $\frac{N_{j+1}}{N_j} \sim 2^n$. Die Anwendung von T_J kostet entsprechend der Reihe nach $\mathcal{O}(N_J), \mathcal{O}(N_{J-1}), \dots, \mathcal{O}(N_{j_0+1})$. Insgesamt ergibt sich ein Aufwand von $\mathcal{O}(N_J + N_{J-1} + \dots + N_{j_0+1})$ arithmetischen Operationen. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} & 2^{J-j_0} 2^d N_{j_0} + \dots + 2 \cdot 2^d N_{j_0} + 2^d N_{j_0} \\ &= 2^d N_{j_0} \sum_{r=1}^{J-j_0} 2^r \\ &= 2^d N_{j_0} \frac{(2^{J-j_0+1} - 1) - 1}{2^d - 1} \\ &\sim 2^{J-j_0} 2^d N_{j_0} = N_J, \end{aligned}$$

also $\mathcal{O}(N_J)$. ■

Etwas später werden wir sehen, wie T_J zur *Vorkonditionierung* benutzt wird. Um das theoretisch abzusichern, benötigen wir noch einige Aussagen über die Beziehung zwischen Φ_j, Ψ_j und M_j .

$\bigcup_j S_j$ liegt dicht in L_2 , d.h. für $J \rightarrow \infty$ ist hierdurch eine Basis von L_2 gegeben. Es bezeichne

$$\Psi := \Phi_j \cup \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \Psi_j = \bigcup_{j=j_0-1}^{\infty} \Psi_j.$$

Dies ist gleich

$$\{\psi_{j,k} \mid (j,k) \in \mathbb{I}\} = \{\psi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{I}\} \tag{1.2.43}$$

mit

$$\mathbb{I} := \bigcup_{j=j_0-1}^{\infty} \{\{j\} \times \nabla_j\}.$$

Satz 1.2.44. Es gelte $\|M_j\|, \|G_j\| = \mathcal{O}(1)$ für $j \rightarrow \infty$. Dann sind T_J und T_J^{-1} genau dann gut konditioniert, d.h.

$$\|T_J\|, \|T_J^{-1}\| = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } J \rightarrow \infty, \quad (1.2.45)$$

wenn Ψ eine *Riesz-Basis* von L_2 ist, d.h. jedes $v \in L_2$ besitzt eine eindeutige Entwicklung

$$v = \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \mathbf{v}_j^T \Psi_j = \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k \in \nabla_j} v_{j,k} \psi_{j,k}$$

mit der Normäquivalenz

$$\|v\|_{L_2} \sim \left(\sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k \in \nabla_j} |v_{j,k}|^2 \right)^{1/2} =: \|\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})}. \quad (1.2.46)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $v_{j,k}$ können noch näher spezifiziert werden: Ψ ist genau dann eine Riesz-Basis von L_2 , wenn eine weitere Riesz-Basis $\tilde{\Psi}$ von L_2 existiert, die *biorthogonal* zu Ψ ist, d.h.

$$(\Psi, \tilde{\Psi})_{L_2} = I. \quad (1.2.47)$$

Dies ist eine Kurzschreibweise für

$$(\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'}) = \delta_{jj'} \delta_{kk'} \quad \text{für alle } (j,k), (j',k') \in \mathbb{I}.$$

Damit sind T_J und T_J^{-1} genau dann gut konditioniert, wenn Ψ eine Riesz-Basis des L_2 ist, d.h. jedes $v \in L_2$ die eindeutige Entwicklung

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k \in \nabla_j} (v, \tilde{\psi}_{j,k})_{L_2} \psi_{j,k} = \sum_{j=j_0-1}^{\infty} (v, \tilde{\psi}_j)_{L_2} \psi_j = (v, \tilde{\Psi})_{L_2} \Psi \\ &= \sum_{j=j_0-1}^{\infty} (v, \psi_j)_{L_2} \tilde{\psi}_j = (v, \Psi)_{L_2} \tilde{\Psi} \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

mit der Bedingung (1.2.47) $(\Psi, \tilde{\Psi})_{L_2} = I$ und

$$\|v\|_{L_2} \sim \left\| (v, \tilde{\Psi})_{L_2}^T \right\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \sim \left\| (v, \Psi)_{L_2}^T \right\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \quad (1.2.49)$$

besitzt.

Bezeichnung: für die Mengen $\Theta = \{\Theta_k \mid k\}$ und $\tilde{\Theta}$ von Funktionen ist (v, Θ) ein Zeilenvektor, (Θ, v) ein Spaltenvektor und $(\Theta, \tilde{\Theta})$ eine Matrix. Mit einer weiteren Matrix C gelten dann die Rechenregeln $(C\Theta, \tilde{\Theta}) = C(\Theta, \tilde{\Theta})$ und $(\Theta, C\tilde{\Theta}) = (\Theta, \tilde{\Theta})C^T$.

Definition. Ein Paar von Funktionen Ψ und $\tilde{\Psi}$, das gemäß Satz 1.2.44 zueinander in Beziehung steht, heißt *Paar biorthogonaler Wavelets* oder einfach *biorthogonale Wavelets*. Im Spezialfall der orthogonalen Wavelets $\Psi = \tilde{\Psi}$ werden dieselben Funktionen in der Entwicklung und der Koeffizientendarstellung verwendet.

Die Ψ werden *primale Wavelets* genannt, mit ihnen werden Funktionen dargestellt und sie spannen die Ansatzräume auf. Die $\tilde{\Psi}$ heißen *duale Wavelets*, welche zu Analysezwecken und zum Berechnen der Koeffizienten verwendet werden.

Bestimmung von $\tilde{\Psi}$

Zusätzlich zu der primalen Multiresolution $S = \{S_j\}_{j \geq j_0}$ von L_2 bildet eine zweite Multiresolution $\tilde{S} := \{\tilde{S}_j\}_{j \geq j_0}$ mit

$$\overline{\bigcup_{j \geq j_0} \tilde{S}_j}^{L_2}, \quad \tilde{S}_{j_0} \subset \tilde{S}_{j_0+1} \subset \dots \subset \tilde{S}_j \subset \tilde{S}_{j+1} \subset \dots, \quad (1.2.50)$$

wobei

$$\tilde{S}_j = S(\tilde{\Phi}_j), \quad \tilde{\Phi}_j = \left\{ \tilde{\phi}_{j,k} \mid k \in \Delta_j \right\},$$

$\tilde{\Phi}_j$ gleichmäßig stabil im Sinne von (1.2.3) sind und

$$\text{diam supp } \tilde{\phi}_{j,k} \sim 2^{-j} \quad \text{für alle } k \in \Delta_j,$$

den Ausgangspunkt. Dies sind genau dieselben Eigenschaften wie für S . Weiter seien Φ_j und $\tilde{\Phi}_j$ biorthogonal auf Level j , d.h.

$$(\Phi_j, \tilde{\Phi}_j)_{L_2} = I. \quad (1.2.51)$$

Es sind Φ_j *primale* und $\tilde{\Phi}_j$ *duale Generatoren*. Da die \tilde{S}_j geschachtelt sind, gibt es für $\tilde{\Phi}_j$ ebenfalls eine Verfeinerungsgleichung, d.h.

$$\tilde{\Phi}_j = \tilde{M}_{j,0}^T \tilde{\Phi}_{j+1}, \quad \text{mit } \tilde{M}_{j,0} \in [\ell_2(\Delta_j), \ell_2(\Delta_{j+1})]. \quad (1.2.52)$$

Das Problem der Konstruktion biorthogonaler Waveletbasen besteht darin, Basen $\Psi_j, \tilde{\Psi}_j$ für die Komplemente von $S(\Phi_j)$ in $S(\Phi_{j+1})$ bzw. $S(\tilde{\Phi}_j)$ in $S(\tilde{\Phi}_{j+1})$ so zu finden, dass

$$S(\Phi_j) \perp S(\tilde{\Psi}_j), \quad S(\tilde{\Phi}_j) \perp S(\Psi_j) \quad \text{und} \quad S(\Psi_j) \perp S(\tilde{\Psi}_r), \quad r \neq j \quad (1.2.53)$$

ist. Dies lässt sich durch das Konzept der *stabilen Vervollständigung* (stable completion) [CDP] bewerkstelligen. (Spezialfall *Lifting Scheme*, 2nd Generation Wavelets, Sweldans).

Satz 1.2.54 (Spezialfall der stabilen Vervollständigung). Die Generatorbasen $\{\Phi_j\}_{j \geq j_0}$ und $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j \geq j_0}$ seien gleichmäßig stabil, biorthogonal und verfeinerbar mit Matrizen $M_{j,0}$ und $\tilde{M}_{j,0}$. $\check{M}_{j,1}$ sei irgendeine stabile Vervollständigung von $M_{j,0}$, so dass $\check{M}_j := (M_{j,0}, \check{M}_{j,1}) = \check{G}_j^{-1}$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h.

$$\|\check{M}_j\|, \|\check{G}_j\| = \mathcal{O}(1), \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Dann ist

$$M_{j,1} := (I - M_{j,0} \tilde{M}_{j,0}^T) \check{M}_{j,1} \quad (1.2.55)$$

ebenfalls eine stabile Vervollständigung von $M_{j,0}$ und $G_j = M_j^{-1} = (M_{j,0}, M_{j,1})^{-1}$ hat die Form

$$G_j = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{j,0}^T \\ \check{G}_{j,1} \end{pmatrix}. \quad (1.2.56)$$

Des Weiteren bilden die Mengen von Funktionen, die durch

$$\Psi_j := M_{j,1}^T \Phi_{j+1} \quad \text{und} \quad \tilde{\Psi}_j := \check{G}_{j,1} \tilde{\Phi}_{j+1} \quad (1.2.57)$$

definiert sind, biorthogonale Systeme, d.h.

$$(\Psi_j, \tilde{\Psi}_j)_{L_2} = I \quad \text{und} \quad (\Psi_j, \tilde{\Phi}_j)_{L_2} = (\Phi_j, \tilde{\Psi}_j)_{L_2} = 0, \quad (1.2.58)$$

was wiederum bedeutet, dass (1.2.53) gilt.

Beachte: (1.2.58) bedeutet, dass die Mengen

$$\Psi := \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j \quad \text{und} \quad \tilde{\Psi} := \tilde{\Phi}_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_j$$

biorthogonal sind.

Die Konstruktion von $\tilde{\Phi}_j$ dual zu Φ_j läuft wie folgt ab:

Zunächst wird das Problem reduziert auf $\tilde{\phi}_{j,k} = 2^{j/2} \tilde{\phi}(2^j \cdot -k)$ für eine einzelne Funktion $\tilde{\phi}$.

Konstruiere $\tilde{\phi}$ so, dass $(\phi, \tilde{\phi}(\cdot - k))_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_{0k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Füge die beiden Verfeinerungsgleichungen

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum a_k \phi(2x - k), \\ \tilde{\phi}(x) &= \sum \tilde{a}_k \tilde{\phi}(2x - k), \end{aligned}$$

hinzu, wobei man die Maskenkoeffizienten $\tilde{\mathbf{a}}$ auf \mathbb{R} mittels Fourier-Transformation berechnet. Durch Adaption von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^d$ erhält man biorthogonale Wavelets auf dem gewünschten Intervall.

Bemerkung 1.2.59. Es sei betont, dass Biorthogonalität (1.2.47) und gleichmäßige Stabilität über zwei Level noch nicht ausreicht, um die Normäquivalenz (1.2.49) über alle Level zu erhalten. Tatsächlich benötigt man dazu weder Eigenschaften der Komplemente noch ihrer speziellen Basen, sondern Eigenschaften der Multiresolutionsfolgen S und \tilde{S} (genauer: Bernstein- und Jackson-Abschätzungen).

Um dies zu sehen, betrachten wir noch eine etwas andere Sichtweise: Definiere Projektoren $P_j : L_2 \rightarrow S_j = S(\Phi_j)$ durch

$$P_j v := (v, \tilde{\Phi}_j)_{L_2} \Phi_j = (v, \tilde{\Psi}^j)_{L_2} \Psi^j = \sum_{k \in \Delta_j} (v, \tilde{\phi}_{j,k})_{L_2} \phi_{j,k} \quad (1.2.60)$$

und entsprechend $\tilde{P}_j : L_2 \rightarrow \tilde{S}_j$ mit vertauschten Rollen von $[\]$ und $[\sim]$. P_j ist Projektor auf $S(\Phi_j) = S_j$ und \tilde{P}_j auf \tilde{S}_j mit

$$P_r P_j = P_r \quad \text{und} \quad \tilde{P}_r \tilde{P}_j = \tilde{P}_r \quad \text{für } r \leq j. \quad (1.2.61)$$

Bemerkung 1.2.62. Sei $\{\Phi_j\}_{j \geq j_0}$ gleichmäßig stabil im Sinne von (1.2.3) und verfeinerbar. Dann ist $\|P_j\|_{L_2} \leq C$ für $j \rightarrow \infty$ genau dann, wenn $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j \geq j_0}$ gleichmäßig stabil im Sinne von (1.2.3) ist. Und die P_j erfüllen (1.2.61) genau dann, wenn $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j \geq j_0}$ verfeinerbar mit $\tilde{M}_{j,0}$ ist. Dann folgt aus $(\Phi_j, \tilde{\Phi}_j)_{L_2} = I$, dass $\tilde{M}_{j,0}^T M_{j,0} = I$ ist.

Bemerkung. Der Lagrange-Interpolator $L_j f := \sum_{k \in \Delta_j} f(2^{-j}k) \phi_{j,k}$ erfüllt nicht die Beziehung

$\|L_j\|_{L_2} \lesssim 1$, da er im Allgemeinen keine Projektion ist. Ansonsten müsste $L_j^2 = L_j$ gelten. Dies ist aber nicht immer der Fall, denn sei $f \in L_2$, dann ist

$$L_j(L_j f) = \sum_{\ell \in \Delta_j} (L_j f)(2^{-j}\ell) \phi_{j,\ell} = \sum_{\ell \in \Delta_j} \sum_{k \in \Delta_j} f(2^{-j}k) \phi_{j,k} (2^{-j}\ell) \phi_{j,\ell}.$$

Dies ist genau dann eine Projektion, wenn $\phi_{j,k}(2^{-j}\ell) = \delta_{k\ell}$. Das ist aber nur der Fall, falls $\phi_{j,k}$ von Hutfunktionen generiert wird.

1 Einleitung und Motivation

Gleichmäßige Stabilität der Komplementbasen Ψ_j und $\tilde{\Psi}_j$ bedeutet mit Hilfe der Projektoren ausgedrückt

$$\|(P_{j+1} - P_j)v\|_{L_2} \sim \|(v, \Psi_j)_{L_2}^T\|_{\ell_2(\nabla_j)} \quad \text{und} \quad \|(\tilde{P}_{j+1} - \tilde{P}_j)v\|_{L_2} \sim \|(v, \tilde{\Psi}_j)_{L_2}^T\|_{\ell_2(\nabla_j)}, \quad (1.2.63)$$

d.h. die Normäquivalenz in (1.2.49) ist äquivalent zu

$$\|v\|_{L_2} \sim \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \sim \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \|(\tilde{P}_j - \tilde{P}_{j-1})v\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall v \in L_2, \quad (1.2.64)$$

mit $P_{j_0-1} \equiv 0 \equiv \tilde{P}_{j_0-1}$.

1.3 Normäquivalenzen für Sobolevräume H^s

Sei jetzt S eine Multiresolution von H^s mit

$$\overline{\bigcup_{j \geq j_0} S_j}^{H^s} \quad \text{für } s > 0.$$

Bemerkung. Für $s \in \mathbb{N}$ definiere H^s durch schwache Ableitungen (siehe auch *Wissenschaftliches Rechnen II*, Kapitel 2):

$$H^s = \{v \in L_2 : \left\| \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right\|_{L_2} < \infty, \quad \forall |\alpha| \leq s\},$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ mit $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$ ist, sowie

$$\|v\|_{H^s} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \left\| \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}.$$

Für $s \notin \mathbb{N}$ gibt es verschiedene Möglichkeiten, H^s zu definieren. Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ kann man H^s mittels Fouriertransformation definieren:

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{v \in L_2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|y\|^2)^s \|\hat{v}(y)\|_2^2 dy < \infty\},$$

wobei

$$\hat{v}(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^d} v(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

die Fouriertransformation von v ist und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^d ist.

Damit kann man für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beispielsweise definieren

$$\|g\|_{H^s(\Omega)} := \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} : v|_\Omega = g\}.$$

Man kann $H^s(\Omega)$ auch als einen Interpolationsraum zwischen $L_2(\Omega)$ und $H^r(\Omega)$ definieren, wobei $r \geq s$ und $r \in \mathbb{N}$. Näheres dazu siehe in [AF, BL, JW, Tr].

Im Prinzip kann man $H^s(\Omega)$ auch durch die Normäquivalenz (1.3.4) (siehe unten) definieren.

Man erhält somit

$$H^s(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) : \left(\sum_j 2^{2js} \|(v, \Psi_j)_{L_2}^T\|_{\ell_2(\nabla_j)}^2 \right)^{1/2}\}.$$

Satz 1.3.1 (Hauptsatz). Seien $\{\Phi_j\}_{j \geq j_0}$ und $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j \geq j_0}$ gleichmäßig stabil, verfeinerbar und biorthogonal in Bezug auf L_2 . Seien Projektoren $P_j : H^s \rightarrow S(\Phi_j)$ definiert wie in (1.2.60). Für $S_j = \left\{ \begin{array}{c} S(\Phi_j) \\ S(\tilde{\Phi}_j) \end{array} \right\}$ mit Ordnung $\bar{m} = \left\{ \begin{array}{c} m \\ \tilde{m} \end{array} \right\}$ und $\bar{t} = \left\{ \begin{array}{c} t \\ \tilde{t} \end{array} \right\}$ gelten eine Jackson–Abschätzung

$$\inf_{v_j \in S_j} \|v - v_j\|_{L_2} \lesssim 2^{-sj} \|v\|_{H^s} \quad \text{für alle } v \in H^s, 0 < s \leq \bar{m} \quad (1.3.2)$$

und eine Bernstein–Ungleichung

$$\|v_j\|_{H^s} \lesssim 2^{sj} \|v_j\|_{L_2} \quad \text{für alle } v_j \in S_j, s < \bar{t}. \quad (1.3.3)$$

Dann gilt für $s \in (-\tilde{\sigma}, \sigma)$ die Normäquivalenz

$$\|v\|_{H^s}^2 \sim \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2sj} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2 \sim \sum_{j=j_0-1}^{\infty} 2^{2sj} \|(v, \Psi_j)_{L_2}^T\|_{\ell_2(\Delta_j)}^2, \quad (1.3.4)$$

wobei $0 < \sigma := \min\{m, t\}$, $0 < \tilde{\sigma} := \min\{\tilde{m}, \tilde{t}\}$ und $t := \sup\{s \mid S(\Phi_j) \subset H^s, j \geq j_0\}$ die Regularität von S sowie $\tilde{t} := \sup\{s \mid S(\tilde{\Phi}_j) \subset H^s, j \geq j_0\}$ die Regularität von \tilde{S} bezeichnen.

Bemerkung. Im Beweis von Satz 1.4.5 unten sieht man, dass man für den Beweis der asymptotisch optimalen Vorkonditionierung von linearen elliptischen PDE–Operatoren mittels der schnellen Wavelettransformation die Normäquivalenz für \mathcal{H} wie auch für \mathcal{H}' benötigt. Zum Beispiel gilt für lineare B–Splines als primale Generatoren $N_2 \subset H^{3/2-\varepsilon} : \bar{m} = 2, \bar{t} = \frac{3}{2}$, also ist dieser Fall für $\mathcal{H} = H^s$ im Fall $s = 1$ ausreichend.

Auch bei adaptiven waveletbasierte Methoden zur Lösung eines elliptischen Randwertproblems kommen Normäquivalenzen zum Einsatz: entsprechende Fehlerverkleinerungen basieren auf der Abschätzung des Residuums

$$\|u - u_h\|_{H^1} \sim \|Au - Au_h\|_{H^{-1}} = \|f - Au_h\|_{H^{-1}}$$

Normäquivalenzen für $s = -1$.

Bemerkung 1.3.5. Die Jackson–Abschätzung (1.3.2) für $\tilde{\Phi}_j$, $0 < s \leq \tilde{m}$ bedeutet $\Pi_{\tilde{m}-1} \subset S(\tilde{\Phi}_j)$, d.h.

$$p = (p, \Phi_j)_{L_2} \tilde{\Phi}_j = \sum_{k \in \Delta_j} (p, \phi_{j,k})_{L_2} \tilde{\phi}_{j,k} \quad \text{für alle } p \in \Pi_{\tilde{m}-1}.$$

$S(\tilde{\Phi}_j)$ ist *exakt* von der Ordnung \tilde{m} (vgl. Finite–Elemente). Weiter ist $\Pi_{\tilde{m}-1} \subset S(\tilde{\Phi}_j)$ und $\Pi_{\tilde{m}-1} \subset S(\tilde{\Phi}_{j+1})$ sowie

$$S(\tilde{\Phi}_{j+1}) = S(\tilde{\Phi}_j) \oplus S(\tilde{\Psi}_j),$$

also gilt nach der Rekonstruktionsidentität

$$p = (p, \Phi_{j+1})_{L_2} \tilde{\Phi}_{j+1} = (\tilde{p}, \Phi_j)_{L_2} \tilde{\Phi}_j + (\tilde{p}, \Psi_j)_{L_2} \tilde{\Psi}_j.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(\tilde{p}, \Psi_j)_{L_2} = 0 \quad \text{für alle } \tilde{p} \in \Pi_{\tilde{m}-1}. \quad (1.3.6)$$

Die Ψ_j haben \tilde{m} verschwindende Momente und sind orthogonal zu Polynomen bis zur Ordnung \tilde{m} .

1 Einleitung und Motivation

Beachte: Die Exaktheit von Φ_j ist genau dann m , wenn die $\tilde{\Phi}_j$ m verschwindende Momente haben. Ebenso ist die Exaktheit von $\tilde{\Phi}_j$ genau dann \tilde{m} , wenn die Ψ_j \tilde{m} verschwindende Momente haben. Aus den verschwindenden Momenten und mit Taylorentwicklung folgt

$$|(v, \psi_{j,k})_{L_2}| \leq 2^{-j(d/2+\tilde{m})} \|v\|_{W_{\infty}^{\tilde{m}}(\text{supp } \psi_{j,k})}, \quad (1.3.7)$$

wobei $W^{\tilde{m}} \subset L_{\infty}$.

Vor einer Beweisskizze von Satz 1.3.1 definiere für $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |v|_s &:= \left(\sum_{j=j_0-1}^{\infty} 2^{2sj} \|(v, \Psi_j)^T\|_{\ell_2(\nabla_j)}^2 \right)^{1/2}, \\ \|v\|_s &:= \left(\sum_{j=j_0-1}^{\infty} 2^{2sj} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Nach Satz 1.3.1 ist $|v|_s \sim \|v\|_{H^s} \sim \|v\|_s$ für $s \in (-\tilde{\sigma}, \sigma)$.

Lemma 1.3.9. Seien $\{\Phi_j\}_j$ und $\{\tilde{\Phi}_j\}_j$ gleichmäßig stabil, verfeinerbar und biorthogonal. Sei P_j durch (1.2.60) definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|v - P_j v\|_{s'} &\leq 2^{-(j+1)(s-s')} \|v\|_s \quad \text{für alle } v \in H^s, s' \leq s \leq m \\ \|v_j\|_s &\leq 2^{j(s-s')} \|v_j\|_{s'} \quad \text{für alle } v_j \in S(\Phi_j), s' \leq s \leq t. \end{aligned}$$

und entsprechend für $|v|_s$.

Lemma 1.3.10. Es gelten die Voraussetzungen wie in Lemma 1.3.9. Dann existiert zu jedem $v \in S(\Phi_j)$ ein $\tilde{v}^* = \tilde{v}^*(v) \in S(\tilde{\Phi}_j)$ mit

$$|v|_s |\tilde{v}^*|_{-s} = (v, \tilde{v}^*)_{L_2} \quad \text{für jedes } 0 \leq s \leq \min(\sigma, \tilde{\sigma}).$$

Skizze eines „falschen“ Beweises von Satz 1.3.1: Anhand dieser Beweisskizze soll man den Einfluss der Jackson- und Bernstein-Ungleichungen erkennen.

Für die obere Abschätzung in (1.3.4)

$$\|v\|_{H^s}^2 \lesssim \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2sj} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2$$

sei $v \in H^s$. Dann gilt $v = \sum_{j=j_0}^{\infty} (P_j - P_{j-1})v$ und damit

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^s}^2 &= \left\| \sum_{j=j_0}^{\infty} (P_j - P_{j-1})v \right\|_{H^s}^2 \\ &\lesssim \sum_{j=j_0}^{\infty} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{H^s}^2 \\ &\lesssim \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2sj} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Der Fehler liegt hier darin, dass man die Norm der Reihe nicht durch die Reihe der Normen abschätzen kann. (Für den Fall einer endlichen Summe wäre die Abschätzung mit einer Konstante der Anzahl der Summenterme korrekt.)

Für die untere Abschätzung in (1.3.4) betrachte

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2sj} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2 \lesssim \|P_j v - v\|_{L_2}^2 + \|P_{j-1} v - v\|_{L_2}^2.$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann wegen der Beschränktheit der Projektoren in der L_2 -Norm für ein beliebiges $\hat{v}_j \in S_j$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|P_j v - P_j \hat{v}_j\|_{L_2}^2 + \|\hat{v}_j - v\|_{L_2}^2 &\lesssim (\|P_j\| + 1) \|\hat{v}_j - v\|_{L_2}^2 \\ &\leq 2^{-2sj} \|v\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

Ebenso schätzt man den zweiten Term ab und erhält

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2sj} \|(P_j - P_{j-1})v\|_{L_2}^2 \lesssim \sum_{j=j_0}^{\infty} \|v\|_{H^s}^2 \lesssim \|v\|_{H^s}^2.$$

Der Beweis dieser Richtung ist wegen der Abschätzung der unendlichen Reihe ebenfalls nicht ganz korrekt. Hier wird eine diskrete Hardy-Ungleichung benötigt. ■

1.4 Vorkonditionierung

Wir werden sehen, wie die schnelle Wavelet-Transformation T_J aus (1.2.38) zusammen mit der Normäquivalenz (1.3.4) und der Wohlgestellttheit des Problems gleichmäßig beschränkte Konditionszahlen von elliptischen Operatoren liefert.

Sei dazu die Operatorgleichung

$$\mathcal{L}u = f \tag{1.4.1}$$

mit $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ und

$$\|\mathcal{L}v\|_{\mathcal{H}'} \sim \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H} \tag{1.4.2}$$

gegeben. Betrachte speziell $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$ und $\mathcal{L} = -\Delta$, den elliptischen Differentialoperator.

Des Weiteren sei Ψ wie in 1.3 Waveletbasis für \mathcal{H} mit zugehöriger dualer Basis $\tilde{\Psi}$, so dass (1.3.4) gilt, d.h.

$$\|v\|_{\mathcal{H}} \sim \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}. \tag{1.4.3}$$

Zum Beispiel gilt für $\mathcal{H} = H^s$: $\mathbf{D}_{\lambda\lambda'} = 2^{|\lambda|s} \delta_{\lambda\lambda'}$ und $\mathbf{v} = \langle v, \tilde{\Psi} \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}$.

Transformiere (1.4.1) nun wie folgt in Waveletkoordinaten: Entwickle $\mathbf{u} = \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^{-1}\Psi) \in \mathcal{H}$ und die rechte Seite $f = \langle \Psi, f \rangle^T \tilde{\Psi} \in \mathcal{H}'$. Dann geht (1.4.1) über in

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^T \mathbf{D}^{-1}\Psi) = f.$$

Teste mit Ψ :

$$\langle \Psi, \mathcal{L}\Psi \rangle \mathbf{D}^{-1}\mathbf{u} = \langle \Psi, f \rangle \iff \mathbf{D}^{-1} \langle \Psi, \mathcal{L}\Psi \rangle \mathbf{D}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1} \langle \Psi, f \rangle.$$

Setzen von $\mathbf{L} := \mathbf{D}^{-1} \langle \Psi, \mathcal{L}\Psi \rangle \mathbf{D}^{-1}$ und $\mathbf{f} := \mathbf{D}^{-1} \langle \Psi, f \rangle$ liefert das transformierte Problem

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{1.4.4}$$

1 Einleitung und Motivation

Satz 1.4.5. Gelten (1.4.2) und (1.4.3), so ist

$$\mathbf{L} : \ell_2(\mathbb{I}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{I})$$

ein Automorphismus mit

$$\|\mathbf{L}\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \sim \|\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \ell_2(\mathbb{I}).$$

Beweis: Sei $\hat{v} \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann kann \hat{v} durch $\hat{v} = \hat{\mathbf{v}}^T \Psi$ dargestellt werden und damit $\mathcal{L}\hat{v} = \hat{\mathbf{v}}^T (\mathcal{L}\Psi)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}\hat{\mathbf{v}}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} &\sim \|\hat{v}\|_{\mathcal{H}} \sim \|\mathcal{L}\hat{v}\|_{\mathcal{H}'} \sim \|\mathbf{D}^{-1}\langle \mathcal{L}\hat{v}, \Psi \rangle^T\|_{\ell_2(\mathbb{I})} = \|\mathbf{D}^{-1}\langle \Psi, \mathcal{L}\hat{v} \rangle\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \\ &= \|\mathbf{D}^{-1}\langle \Psi, \hat{\mathbf{v}}^T (\mathcal{L}\Psi) \rangle\|_{\ell_2(\mathbb{I})} = \|\mathbf{D}^{-1}\langle \Psi, \mathcal{L}\Psi \rangle \hat{\mathbf{v}}\|_{\ell_2(\mathbb{I})}. \end{aligned}$$

Ersetze $v := \mathbf{D}\hat{\mathbf{v}}$, dann folgt

$$\|\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \sim \|\mathbf{D}^{-1}\langle \Psi, \mathcal{L}\Psi \rangle \mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} = \|\mathbf{L}\mathbf{v}\|_{\ell_2(\mathbb{I})}.$$

■

Zusammenfassung: Die Anwendung von \mathbf{D}^{-1} von links und von rechts auf $\langle \Psi, \mathcal{L}\Psi \rangle$ liefert optimale Präkonditionierung. Wenn \mathcal{L} die Ordnung $2r$ hat, so hat \mathbf{D}^{-1} die Ordnung $-r$, $r \in \mathbb{R}$. Daher ist jeder lineare Operator, der (1.4.2) erfüllt, wohlgestellt in entsprechend skaliertes Waveletbasis. Man kann also \mathcal{L} explizit mit Hilfe einer Waveletbasis darstellen.

Spezialfall: uniforme Gitter

Sei S_J das feinste Gitter. Aufstellung von \mathcal{L} bzgl. der Einzelskalenbasis $S(\Phi_J)$ ergibt $u_J = \mathbf{c}_J^T \Phi_J$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_J, \mathcal{L}\Phi_J \rangle \mathbf{c}_J = \langle \Phi_J, f \rangle \\ \iff &T_J^T \langle \Phi_J, \mathcal{L}\Phi_J \rangle T_J T_J^{-1} \mathbf{c}_J = T_J^T \langle \Phi_J, f \rangle \\ \iff &\mathbf{D}_J^{-1} T_J^T \langle \Phi_J, \mathcal{L}\Phi_J \rangle T_J \mathbf{D}_J^{-1} \mathbf{D}_J T_J^{-1} \mathbf{c}_J = \mathbf{D}_J^{-1} T_J^T \langle \Phi_J, f \rangle. \end{aligned}$$

(Hier wurden

Nun ist $\langle \Psi^J, \mathcal{L}\Psi^J \rangle = T_J^T \langle \Phi_J, \mathcal{L}\Phi_J \rangle T_J$ und $\mathbf{D}_J T_J^{-1} \mathbf{c}_J = \mathbf{d}^J = \mathbf{u}_J$. Setze $\mathbf{f}_J := \mathbf{D}_J^{-1} T_J^T \langle \Phi_J, f \rangle$. Damit folgt

$$\mathbf{L}_J \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_J. \tag{1.4.6}$$

Korollar 1.4.7. Die spektrale Kondition von \mathbf{L}_J ist gleichmäßig beschränkt, unabhängig von J , d.h.

$$\kappa_2(\mathbf{L}_J) \sim 1 \quad \text{für } J \rightarrow \infty.$$

Also erhält man beim Aufstellen von \mathcal{L} in Einzelskalenbasis und bei Anwendung der schnellen Wavelettransformation und Diagonalisierung gleichmäßig beschränkte Konditionszahlen. Der Nachteil bei einem uniformen vollen Gitter ist eine *lokale* schnelle Wavelettransformation. Zusammen mit einer wie in Abschnitt 2.4 beschriebenen Nested-Iteration-Strategie lässt sich dieselbe *optimale Komplexität* wie mit den Multigrid-Verfahren zeigen, siehe Satz 2.4.5.

Programmieraufgabe. Betrachte auf $\Omega := (0, 1)^2$ die elliptischen Randwertprobleme

$$(A) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega; \end{aligned}$$

$$(B) \quad \begin{aligned} -\Delta u + u &= 1 && \text{in } \Omega \\ &&& \text{mit periodischen Randbedingungen für } u \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Diese sollen mittels eines schwachen Variationsansatzes bezüglich eines feinsten Gitters mit Gitterweite $h_J := 2^{-J}$ mit möglichst hohem J numerisch gelöst werden.

Wähle dazu Ansatzräume S_J , die von Tensorprodukt-Hutfunktionen

$$\phi_{J,\mathbf{k}}(x, y) := \phi_{J,k_1}(x) \phi_{J,k_2}(y) = 2^{J/2} \phi(2^J x - k_1) 2^{J/2} \phi(2^J y - k_2)$$

aufgespannt werden.

Stellen Sie jeweils für Problem (A) und (B) das zugehörige lineare Gleichungssystem bezüglich dieser Basis auf. Man beachte, dass sich aufgrund der Produktstruktur der Basen die Systemmatrix und die rechte Seite als Tensorprodukte der univariaten Situation schreiben lassen. Zur Berechnung der Einträge lassen sich die Ergebnisse aus Aufgabe 12 (mit zusätzlichen Bedingungen, die die Eindeutigkeit sicherstellen) verwenden; Sie finden alle benötigten Werte auf <http://www2.math.uni-paderborn.de/ags/kunoth/lehre/wissenschaftliches-rechnen-iii.html>.

Lösen Sie dann dieses Gleichungssystem iterativ mit dem cg-Verfahren angewendet auf das System (1.4.6)

$$\mathbf{L}_J \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_J,$$

das durch FWT zusammen mit diagonalen Vorkonditionierung entsteht. Die zur FWT benötigten Matrizen \mathbf{M}_j der biorthogonaler Generatorbasen für $m = 2$ und $\tilde{m} = 4$ für Problem (A) finden Sie ebenfalls auf der Webseite; für den Fall periodischer Randbedingungen (B) lassen sich die entsprechenden Matrizen daraus ablesen.

Stellen Sie die Ergebnisse für beide Probleme folgendermaßen dar:

- graphische Visualisierung der Lösung;
- Berechnung der spektralen Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{L}_J)$;
- graphische Darstellung des Fehlers (in welcher Norm?) über den Iterationszähler der Lösung des vorkonditionierten Systems und des Systems ohne Vorkonditionierung.

Zusatzaufgabe: Betrachten Sie die Probleme (A) und (B) mit rechter Seite f , die auf jedem Kubus der Seitenlänge 2^{-J} durch eine Konstante $f_{J,\mathbf{k}}$ gegeben ist.

Hinweise: Zur Herleitung der Steifigkeitsmatrix kann man die folgenden Werte der eindimensionalen Integrale benutzen:

Mit $I(i) := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) \phi(x-i) dx$ folgt: $I(-1) = I(0) = \frac{1}{2}$.

Für $J(i, k) := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) \phi(x-i) \phi(x-k) dx$ folgt: $J(-1, -1) = J(0, 0) = \frac{1}{3}$ und $J(0, -1) = J(-1, 0) = \frac{1}{6}$.

Weiterhin ist für $K(i, k) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) \phi'(x-i) \phi'(x-k) dx$: $K(-1, -1) = K(0, 0) = 1$ und $K(-1, 0) = K(0, -1) = -1$.

Die Matrix D berechnet sich auf folgende Weise: $D_{(j,k)(j',k')}^s = 2^{js} \delta_{jj'} \delta_{kk'}$. Dies ergibt also für den Fall $s = 1$: $D^1 = \text{diag}(2^{j_0}, \dots, 2^{j_0}, 2^{j_0+1}, \dots, 2^{j_0+1}, \dots, 2^J, \dots, 2^J)$ und entsprechend $D^{-1} = \text{diag}(2^{-j_0}, \dots, 2^{-j_0}, 2^{-j_0-1}, \dots, 2^{-j_0-1}, \dots, 2^{-J}, \dots, 2^{-J})$.

1 Einleitung und Motivation

Betrachtet man das Problem zunächst in einer Raumdimension, lautet die Problemformulierung: $-u'' + u = 1$ auf $\Omega = (0, 1)$. Die zugehörige schwache Formulierung ist gegeben durch

$$\int_0^1 -u''v \, dx + \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 1v \, dx \quad \forall v$$

Wegen der periodischen Randbedingungen für den Testraum gilt $v(0) = v(1)$. Für den Lösungsraum wird $u'(0) = u'(1)$ benötigt. Also braucht man insgesamt: Lösungsraum=Testraum= $\{v \in H^1(0, 1) : v(0) = v(1), v'(0) = v'(1)\} =: H_{per}^1$.

Dann ist

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_{per}^1$$

für $u \in H_{per}^1$ zu lösen. Es ergibt sich dann $u \equiv 1$ als eindeutige Lösung.

In zwei Raumdimensionen sind folgende Integrale zu berechnen:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Damit folgt

$$\int_{\Omega} \nabla \circ \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

In (A) sollte die gesuchte Lösung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega)$$

gilt. In (B) muss man periodische Randbedingungen berücksichtigen. Das bedeutet, man will erreichen, dass der Term $-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$ verschwindet, um das lineare Gleichungssystem zu vereinfachen. Dies ist der Fall, wenn folgende Bedingungen gelten:

$$v|_{\Gamma_1} = v|_{\Gamma_2}, \quad v|_{\Gamma_3} = v|_{\Gamma_4}$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_1} = -\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_2}, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_3} = -\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_4},$$

wobei $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ die Ränder des Gebietes sind. Berechnet man nun $u \in H_{per}^1 := \{v \in H^1(\Omega), \text{ obige Bedingungen, periodische Dirichlet-Bedingungen, Neumann-Bedingungen }\}$, so dass

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_{per}^1,$$

dann ist u eindeutig und $u \equiv 1$, falls $f \equiv 1$.

1.5 Wavelets auf Gebieten $(0, 1)^d$

Auch wenn die vorgestellte Vorgehensweise zur Konstruktion von Wavelets nicht per se auf eine Raumdimension beschränkt war, werden multidimensionale Waveletbasen häufig als Tensorprodukte von eindimensionalen Basen konstruiert. Solche Konstruktionen sind natürlich nur möglich, wenn der unterliegende Raum eine Tensorproduktstruktur aufweist, wie beispielsweise der d -dimensionale Einheitswürfel $\square := (0, 1)^d$, auf den wir uns im Folgenden der Einfachheit halber beschränken wollen. Die Konstruktion von Wavelets auf allgemeineren Gebieten ist nach wie vor ein aktives Forschungsgebiet.

Das Tensorprodukt $f_{\square} := f_1 \otimes \dots \otimes f_d: (0, 1)^d \rightarrow \mathbb{R}$ von Funktionen

$$f_i: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d$$

ist definiert als

$$f_{\square}(\mathbf{x}) = (f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)(\mathbf{x}) := f_1(x_1) \cdots f_d(x_d), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_d)^T \in (0, 1)^d.$$

Für Matrizen $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ ist das Tensorprodukt definiert als

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := (a_{ij} \cdot B) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1 1}B & \cdots & a_{m_1 n_1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_1 m_2 \times n_1 n_2},$$

d.h. jedes Element der Matrix \mathbf{A} wird mit der Matrix \mathbf{B} multipliziert. Das Tensorprodukt von Matrizen wird häufig auch als *Kronecker-Produkt* bezeichnet.

Die intuitivste Idee ist das Tensorprodukt der jeweiligen Waveletbasen

$$\Psi_{\square, (J)}^{\text{ani}} := \{\psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{ani}} : J \geq j_l \geq j_0 - 1, k_l \in \nabla_{j_l}, l = 1, \dots, d\}, \quad \psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{ani}}(\mathbf{x}) := \prod_{l=1}^d \psi_{j_l, k_l}(x_l) \quad (1.5.1)$$

zu betrachten, wobei $\{\psi_{j_l, k_l} : J \geq j_l \geq j_0 - 1, k_l \in \nabla_{j_l}\}$ für alle $l = 1, \dots, d$ eine eindimensionale Waveletbasis auf Level J ist. Die Tensorprodukt Basis aus univariaten Waveletbasen nennt man *anisotrope Waveletbasis*, da die Träger bezüglich Basisfunktionen auf sehr unterschiedlichen Leveln in den einzelnen Raumdimensionen sehr schmal sind, also anisotrop. Es sei erwähnt, dass hier in jeder Raumdimension unterschiedliche Wavelets und Skalierungsfunktionen verwendet werden können, wir uns allerdings auf den Fall beschränken, dass diese in jeder Raumdimension identisch sind, um die Notation möglichst überschaubar zu halten.

Diese anisotrope Konstruktion besitzt global nicht mehr die gleiche Struktur bestehend aus Skalierungsfunktionen auf dem größten Gitter und Wavelets auf den feineren Gittern, allein schon weil das Level vektorwertig ist. Eine weitere Konstruktion die auch auf Tensorprodukten beruht ist die *isotrope* Konstruktion, welche diese Struktur auch global erhält und nur einen skalaren Levelindex besitzt. Das bedeutet, dass nur Funktionen auf dem gleichen Level tensoriert werden und so wiederum alle Basisfunktionen nur nahezu quadratische, isotrope Träger besitzen. Für diese Art der Konstruktion werden verschiedene Typen von Wavelets betrachtet. Unter anderem werden hierzu im Unterschied zur anisotropen Konstruktion auch Skalierungsfunktionen auf feineren Gittern verwendet. Die Zerlegungen lassen sich im zweidimensionalen Fall recht gut schematisch darstellen. Die Multiskalenzerlegung von $\Phi_{j_0+3} \otimes \Phi_{j_0+3}$ lautet beispielsweise für die anisotrope Konstruktion:

$$\Psi_{\square, (j_0+3)}^{\text{ani}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \Phi_{j_0} \otimes \Phi_{j_0} & \Phi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0} & \Phi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Phi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \Psi_{j_0} \otimes \Phi_{j_0} & \Psi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0} & \Psi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Psi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \Psi_{j_0+1} \otimes \Phi_{j_0} & \Psi_{j_0+1} \otimes \Psi_{j_0} & \Psi_{j_0+1} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Psi_{j_0+1} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \Psi_{j_0+2} \otimes \Phi_{j_0} & \Psi_{j_0+2} \otimes \Psi_{j_0} & \Psi_{j_0+2} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Psi_{j_0+2} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \end{array}$$

und für die isotrope Konstruktion:

$$\Psi_{\square, (j_0+3)}^{\text{iso}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \Phi_{j_0} \otimes \Phi_{j_0} & \Phi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0} & \Phi_{j_0+1} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Phi_{j_0+2} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \Psi_{j_0} \otimes \Phi_{j_0} & \Psi_{j_0} \otimes \Psi_{j_0} & \Psi_{j_0+1} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Psi_{j_0+2} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \Psi_{j_0+1} \otimes \Phi_{j_0+1} & \Psi_{j_0+1} \otimes \Psi_{j_0+1} & \Psi_{j_0+2} \otimes \Phi_{j_0+2} & \Psi_{j_0+2} \otimes \Psi_{j_0+2} \\ \hline \end{array}$$

Beachten sie, dass die Größe der Zeilen und Spalten in den schematischen Darstellungen *nicht* die Größe des jeweiligen Trägers repräsentieren. Wir beschränken uns hier auf den anisotropen Fall. Für anisotrope Basen (1.5.1) gelten analoge Resultate wie im eindimensionalen Fall, wie

1 Einleitung und Motivation

beispielsweise die Normäquivalenz aus Satz 1.3.1 mit $j \leftrightarrow \|\mathbf{j}\|_\infty$. Da sich die Basis (1.5.1) auch schreiben lässt als

$$\Psi_{\square,(J)}^{\text{ani}} = \Psi^J \otimes \cdots \otimes \Psi^J,$$

ergibt sich unmittelbar die multidimensionale Wavelettransformation

$$T_{\square,J}^{\text{ani}} := T_J \otimes \cdots \otimes T_J \equiv T_{J,J-1}^{\text{ani}} \cdots T_{J,j_0}^{\text{ani}},$$

mit der eindimensionalen Wavelettransformation T_J aus (1.2.38) und

$$T_{J,j}^{\text{ani}} := \bigotimes_{l=1}^d \begin{pmatrix} M_j & 0 \\ 0 & I^{\#\Delta_j - \#\Delta_{j+1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\#\Delta_j) \times (\#\Delta_j)}$$

analog zu (1.2.39). Damit lautet die verallgemeinerte Verfeinerungsgleichung

$$\Psi_{\square,(J)}^{\text{ani}} = (T_{\square,J}^{\text{ani}})^T \Phi_{\square,J},$$

bezüglich der Tensorprodukt Einzelskalenbasis

$$\Phi_{\square,J} := \Phi_J \otimes \cdots \otimes \Phi_J.$$

Als Analogon zum diagonalen Vorkonditionierer in (1.4.3) ergibt sich

$$(D_{\text{ani}}^{\pm s})_{\lambda,\lambda'} := 2^{\pm \|\lambda\|_\infty} \delta_{\lambda,\lambda'},$$

wobei $\lambda := (\mathbf{j}, \mathbf{k})$ mit vektorwertigem Levelindex $|\lambda| := \mathbf{j}$.

Betrachtet man anstatt der vollen Tensorprodukte in (1.5.1) nur Produkte auf sogenannten (optimierten) *dünnen Gittern*, so lassen sich Approximationsraten erreichen die unabhängig von der Raumdimension d sind (vgl. [BG]). Hiermit lässt sich der *Fluch der Dimension* umgehen, wobei die auftretenden Konstanten sehr groß werden können.

Grafik zu den Konditionszahlen:

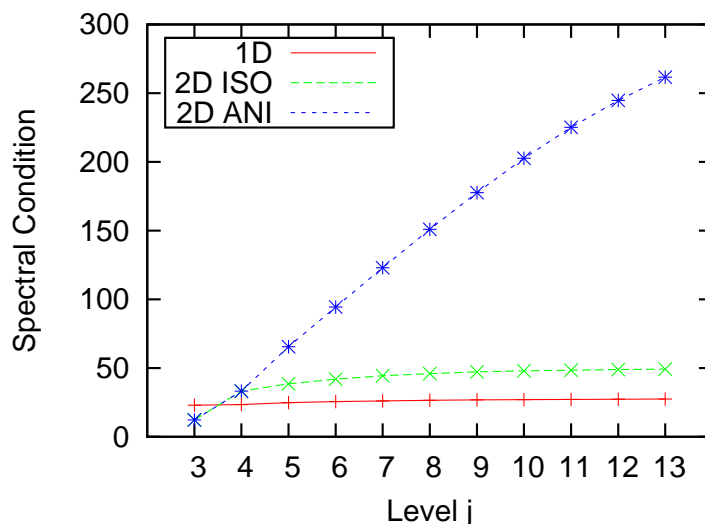


Abbildung 2: Konditionszahlen

Zugehörige Werte:

1.5 Wavelets auf Gebieten $(0, 1)^d$

Level	1D	2D isotrop	2D anisotrop
3	2.3009e+01	1.2227e+01	1.2227e+01
4	2.3374e+01	3.3305e+01	3.3305e+01
5	2.4855e+01	3.8444e+01	6.5603e+01
6	2.5580e+01	4.1951e+01	9.4387e+01
7	2.6139e+01	4.4381e+01	1.2304e+02
8	2.6536e+01	4.6005e+01	1.5088e+02
9	2.6834e+01	4.7132e+01	1.7770e+02
10	2.7060e+01	4.7933e+01	2.0269e+02
11	2.7235e+01	4.8520e+01	2.2511e+02
12	2.7371e+01	4.8960e+01	2.4471e+02
13	2.7479e+01	4.9298e+01	2.6160e+02

2 Multigridmethoden

Multigridmethoden zählen zu den schnellsten Lösern für lineare Gleichungssysteme mit großer Dimension N . Ursprünglich entwickelt wurden sie von Fedorenko (1961 als Zweigitter- und 1964 als Mehrgitterverfahren). Der Aufwand von Fedorenkos Verfahren stieg wie $\mathcal{O}(N)$ mit wachsendem N für die Diskretisierungsmatrix des Laplace-Operators. 1966 wurde die Methode von Bachvalow für Operatoren mit variablen Koeffizienten erweitert und 1975 dann von Archi Brandt für große N entwickelt. Schließlich führte Hackbusch 1976 eine Vereinfachung der Ingredienzen ein und lieferte einen ersten Konvergenzbeweis, siehe dazu [H1].

Im Folgenden entspricht Multigrid einem geometrischen Multigrid, d.h. ein lineares Gleichungssystem entsteht aus der Diskretisierung einer elliptischen PDE, und man kann Multigrid als Diskretisierung bezüglich unterschiedlicher Gitter Ω_h und Ω_H interpretieren, wobei hier das eine Gitter feiner als das andere ist.

Im Unterschied dazu gibt es seit den 80'er Jahren algebraische Multigrid, die nur mit dem linearen Gleichungssystem arbeiten. Die Idee hierbei ist, aus den Nichtnulleinträgen der Systemmatrix grobe Approximationen zu konstruieren.

Dann werden die Knoten zu Clustern zusammengefasst und die Werte a_{ij} auf den Clustern approximiert. Die Konvergenzraten betragen $0.13 - 0.9$.

Der Ausgangspunkt von Multigridverfahren ist die Feststellung, dass bei der iterativen Lösung eines Systems

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

„langwellige“ Anteile (smooth parts) des Fehlers eine andere Rolle als „kurzwellige“ (nonsmooth parts) spielen.

Löse das lineare System nun bezüglich verschiedener Gitter, d.h. auf Gittern mit unterschiedlicher Gitterweite h . Es ist zu beobachten, dass klassische Iterationsverfahren glättend wirken, d.h. sie beseitigen schnell die hochfrequenten Anteile des Fehlers.

Für die *Konvergenztheorie* benötigt man ein Maß zum Messen dieser Glattheit. Außerdem spielt die absolute Größe des Fehlers eine Rolle. Später werden zwei Konvergenztheorien behandelt: zunächst die klassische Theorie von Braess und Hackbusch (1983), die zusätzliche Regularität der Lösung benötigt, und dann die neuere Theorie, die auf Unterraumzerlegungen basiert, nach Bramble, Pasciak, Xu und Wang (1991).

2.1 Multigridmethoden für Variationsaufgaben

Wir betrachten Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren.

Beispiel (Spektralanalyse (local node analysis)): Betrachte eine Diskretisierung des Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega := (0, 1)^2$$

mit homogenen Dirichletranddaten mittels des Standard-Fünf-Punkte-Sterns. Dies führt auf das System

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Zur Lösung betrachten wir die gewichtete Jacobi-Iteration ($A = D + L + U$)

$$\mathbf{u} \leftarrow ((1 - \omega)I - \omega D^{-1}(L + U))\mathbf{u} + \omega D^{-1}\mathbf{f}$$

für $0 < \omega < 2$ (für $\omega = 1$ entspricht dies dem Standard–Jacobi–Verfahren). Die Iterationsmatrix lautet

$$S := (1 - \omega)I - \omega D^{-1}(L + U) = I - \omega D^{-1}A.$$

Die Eigenvektoren von S können als Diskretisierung der Eigenfunktionen des Laplace–Operators Δ auf dem Gitter Ω_h interpretiert werden. Diese Eigenvektoren sind für $1 \leq k, \ell \leq n - 1$ (siehe Aufgabe 12)

$$(v^{k,\ell})_{ij} = \sin\left(\frac{ik\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{j\ell\pi}{n}\right), \quad i, j = 1, \dots, n - 1$$

mit den zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda^{k,\ell} = \begin{cases} 1 - \frac{\omega}{2} \left(2 - \cos \frac{k\pi}{n} - \cos \frac{\ell\pi}{n}\right) & \text{für allgemeines } \omega, \\ \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2} \cos \frac{\ell\pi}{n} & \text{für } \omega = 1, \\ \frac{1}{4} \cos \frac{k\pi}{n} + \frac{1}{4} \cos \frac{\ell\pi}{n} + \frac{1}{2} & \text{für } \omega = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Da S symmetrisch positiv definit ist, existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, in die sich der Fehler entwickeln lässt.

Sind k, ℓ klein, etwa im Bereich von 1 bis 10, so entsprechen die zugehörigen Eigenvektoren den niedrigfrequenten Anteilen des Fehlers. Für große k, ℓ , d.h. $k, \ell \approx n - 1$ sind dies die hochfrequenten Anteile.

Eine Anwendung von S bedeutet also, dass die spektralen Anteile des Fehlers mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda^{k,\ell}$ multipliziert werden. Dabei werden die Anteile des Fehlers, bei denen die zugehörigen Eigenwerte betragsmäßig nahe 1 sind, am wenigsten gedämpft. Nach einigen Schritten des Jacobi–Verfahrens mit $\omega = 1$ bleiben die Anteile übrig, für die entweder k und ℓ beide klein oder k und ℓ beide groß sind. Wegen $\cos \pi = -1$ reduziert das Jacobi–Verfahren mit $\omega = \frac{1}{2}$ die Anteile für k, ℓ beide groß. Es bleiben also nur niedrigfrequente Anteile, d.h. die langwelligen Frequenzen des Fehlers, übrig.

Wir beobachten also eine deutliche Abnahme des Fehlers, solange er oszilliert. Sobald der Fehler „glatt“ ist, ist die Fehlerreduktion nur noch von der Ordnung $1 - \mathcal{O}(n^{-2})$, womit die Iteration fast stagniert. Später wird sich zeigen, dass für Diskretisierungen elliptischer partieller Differentialgleichungen Standarditerationsverfahren wie Jacobi–, Gauß–Seidel–, SSOR– oder cg–Verfahren glatter sind.

Die Idee von Multigridverfahren lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

- 1) Führe einige Relaxations- oder Glättungsschritte auf einem Gitter Ω_h mit Schrittweite h durch (d.h. oszillierende Anteile des Fehlers werden geglättet). Hierbei kann beispielsweise die Jacobi–Relaxation angewendet werden.
- 2) Transportiere den Fehler auf ein gröberes Gitter Ω_H mit $H = 2h$ (beachte: glatte Funktionen können gut auf einem gröberen Gitter approximiert werden).
- 3) Löse das Gleichungssystem auf Ω_H (direkt mit Cholesky, wenn das System klein genug ist, oder sonst weitere Vergrößerung).
- 4) Datiere die Lösung von 1) mit dem Ergebnis von 3) auf.

Hierbei bezeichnet man den ersten Schritt auch als Glättung und die Schritte 2) bis 4) als Grobgitterkorrektur.

Zweigitter–Algorithmus für konforme Elemente

Wir betrachten folgendes Variationsproblem, das wir schon aus Kapitel I aus der Vorlesung *Wissenschaftliches Rechnen II* kennen: Sei V ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$, $a(\cdot, \cdot)$ bilinear

2 Multigridmethoden

und stetig auf V . Weiter gebe es eine Konstante $c > 0$ mit

$$a(v, v) \geq c \|v\|_V^2 \quad \text{auf } \tilde{V}_0 \subset V.$$

Sei nun $V_h \subset \tilde{V}_0$ mit $\dim V_h = N_h < \infty$. Dann gilt

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_h \iff \min_{v \in V_h} \mathcal{J}(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle. \quad (V_h)$$

Als Basisiterationsverfahren zur Lösung des Systems

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

betrachten wir

$$\mathbf{x}^{k+1} = S(\mathbf{x}^k) + \omega D^{-1} \mathbf{f} := (I - \omega D^{-1} A) \mathbf{x}^k + \omega D^{-1} \mathbf{f}. \quad (G)$$

Damit lautet der k -te Zyklus des Zweigitter-Algorithmus: Sei $u_h^{(k)}$ eine gegebene Näherung an u_h in V_h .

1. (Glättung) Führe ν_1 Iterationen von S durch, d.h.

$$u_h^{(k,1)} := S^{\nu_1} u_h^{(k)}.$$

In der Regel gilt $1 \leq \nu_1 \leq 3$.

2. (Grobgitterkorrektur) Setze $H = 2h$ und berechne die Lösung \hat{v}_H der Variationsaufgabe (V_H) in V_H :

$$\min_{v_H \in V_H} \mathcal{J}(u_h^{(k,1)} + v_H).$$

3. (Aufdatierung) Setze $u_h^{(k+1)} := u_h^{(k,1)} + \hat{v}_H$.

Multigrid-Algorithmus für konforme Elemente

Zur Formulierung des Multigrid-Algorithmus sei die Zerlegung von Ω so gewählt, dass die Ansatzräume geschachtelt sind:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{\ell_{\max}} \subset \tilde{V}_0,$$

wobei $h = 2^{-\ell_{\max}}$ sei. Ziel ist es, die Lösung von

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

auf dem feinsten Gitter zu bestimmen. Dabei enthält \mathbf{u} die Entwicklungskoeffizienten $u_h \in V_h = V_{\ell_{\max}}$. Weitere Parameter im Algorithmus sind die Gitterebene ℓ und der Iterationszähler k .

Wir betrachten den k -ten Zyklus auf der Ebene ℓ , d.h. $MGM_\ell = MGM(\ell, \nu_1, \nu_2, \mu)$. Sei $u_\ell^{(k)}$ eine gegebene Näherung in V_ℓ .

1. Führe eine A-priori-Glättung mit ν_1 Schritten durch:

$$u_\ell^{(k,1)} := S^{\nu_1} u_\ell^{(k)}.$$

2. Grobgitterkorrektur: Sei $v_{\ell-1}$ Lösung der Variationsaufgabe $(V_{\ell-1})$ auf der Ebene $\ell - 1$:

$$\min_{\tilde{v}_{\ell-1} \in V_{\ell-1}} \mathcal{J}(u_{\ell}^{(k,1)} + \tilde{v}_{\ell-1}).$$

Ist $\ell = 0$ (gröbster Raum), so löse exakt (direkter Löser) und setze $\hat{v}_{\ell-1} = v_{\ell-1}$.

Ist $\ell > 0$, so finde eine Approximation $\hat{v}_{\ell-1}$ von $v_{\ell-1}$ durch μ -fache Anwendung von $MGM_{\ell-1}$ mit Startwert 0.

Setze dann $u_{\ell}^{(k,2)} := u_{\ell}^{(k,1)} + \hat{v}_{\ell-1}$.

3. A-Posteriori-Glättung mit ν_2 Glättungsschritten

$$u_{\ell}^{(k,3)} := S^{\nu_2} u_{\ell}^{(k,2)}.$$

Setze $u_{\ell}^{(k+1)} := u_{\ell}^{(k,3)}$.

Für $\mu = 1$ ergibt sich ein sogenannter *V-Zyklus* wie in Abbildung 3; $\mu = 2$ ergibt einen *W-Zyklus*, wie in Abbildung 4 zu sehen.

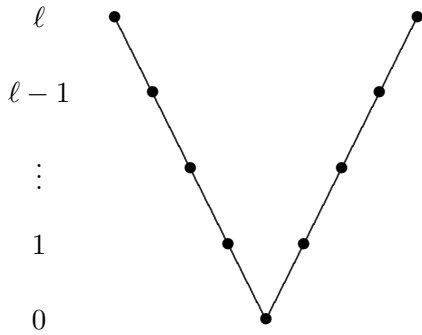


Abbildung 3: Ein V-Zyklus.

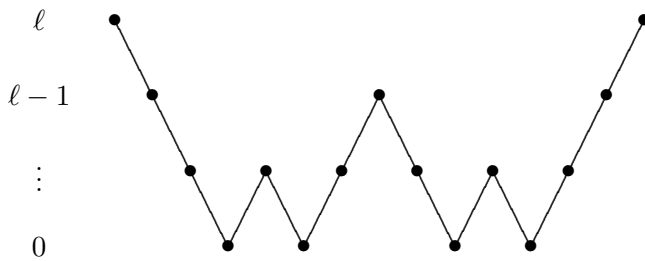


Abbildung 4: Ein W-Zyklus.

Bemerkung: (i) Für $\ell = 1$ gibt es nur zwei Ebenen. Die Grobgitterkorrektur benutzt dann die exakte Lösung. Für $\ell > 1$ findet eine approximative Grobgitterkorrektur statt. In der Konvergenztheorie wird der Multigrid-Algorithmus als „gestörter“ Zweigitter-Algorithmus behandelt. (ii) Bei $\ell > 1$ findet eine Unterscheidung zwischen ν_1 und ν_2 statt. Praktisch ist bei W-Zyklen meist nur $\nu_1 > 0$ vorhanden, bei V-Zyklen ist üblicherweise $\nu_1 = \nu_2$. (iii) Für $\mu = 1$ erhält man einen V-Zyklus, für $\mu = 2$ einen W-Zyklus. Bei den meisten Problemen ist der V-Zyklus schneller, der W-Zyklus ist jedoch meist stabiler. (iv) Auf dem größten Gitter errechnet man die Lösung exakt, z.B. mit dem Cholesky-Verfahren. (v) Die Verwendung sehr grober Gitter ist sehr günstig für die Konvergenz, auch wenn das Originalproblem dort nicht definiert ist.

Übergang zwischen Gittern

In Schritt 2 muss man den Übergang von Vektoren und Matrizen bzgl. V_ℓ auf entsprechende Objekte auf $V_{\ell-1}$ durchführen. Seien A_ℓ und \mathbf{f}_ℓ die Steifigkeitsmatrix bzw. die rechte Seite des Systems auf der Ebene ℓ .

Definition 2.1.1. Setze

$$A_{\ell-1} := rA_\ell p \quad f_{\ell-1} := r d_\ell.$$

Dabei heißt $r = r_\ell$ *Restriktion* und $p = p_\ell$ *Prolongation*. Setze

$$d_\ell := f_\ell - A_\ell u_\ell^{(k,1)}$$

als Residuum.

Die Wahl von r und p hat erheblichen Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit. Bei konformen Finiten Elementen ist p die Matrixdarstellung der Injektion

$$i : V_{\ell-1} \rightarrow V_\ell$$

und $r := p^T$ die des adjungierten Operators.

Allgemeine Berechnung von MGM_ℓ (Matrix–Vektor–Form)

Sei $\{\phi_{\ell,i} \mid i = 1, \dots, N_\ell\}$ Basis von V_ℓ (z.B. ein kardinaler B–Spline bei einem uniformen Gitter mit dem Generator $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k)$, was $\phi_{\ell,i}(x) = \phi(2^\ell x - i)$ impliziert). Wegen $V_{\ell-1} \subset V_\ell \subset \hat{V}_0$ existiert eine Matrix $r \in \mathbb{R}^{N_{\ell-1} \times N_\ell}$ mit

$$\phi_{\ell-1,i}(x) = \sum_{j=1}^{N_\ell} r_{ij} \phi_{\ell,j}(x) \quad \text{mit } i = 1, \dots, N_{\ell-1}. \quad (2.1.2)$$

Beispiel 2.1.3. Sei

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Dann gilt die Verfeinerungsgleichung

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \phi(2x) + 1 \phi(2x - 1) + \frac{1}{2} \phi(2x - 2),$$

und man kann

$$\phi_{\ell,j}(x) = \phi(2^\ell x - j)$$

mit

$$\text{supp } \phi_{\ell,j} = [2^{-\ell} j, 2^{-\ell}(j + 2)]$$

setzen. Weiter ist

$$\text{supp } \phi_{\ell-1,j} = [2^{-\ell+1} j, 2^{-\ell+1}(j + 2)].$$

Aus der Verfeinerungsgleichung (2.1.2) folgt nun

$$\phi_{\ell-1,i} = \frac{1}{2} \phi_{\ell,2i} + \phi_{\ell,2i+1} + \frac{1}{2} \phi_{\ell,2i+2}$$

und damit ist r gegeben durch

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } j \in \{2i, 2i + 2\} \\ 1, & \text{für } j = 2i + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Im Folgenden leiten wir die Matrix–Vektor–Form von MGM_ℓ her. Das bei der Grobgitterkorrektur zu lösende Minimumproblem

$$\min_{\tilde{v}_{\ell-1} \in V_{\ell-1}} \mathcal{J}(u_\ell^{(k,1)} + \tilde{v}_{\ell-1})$$

lautet in schwacher Formulierung: finde $\tilde{v}_{\ell-1} \in V_{\ell-1}$ als Lösung von

$$a(u_\ell^{(k,1)} + \tilde{v}_{\ell-1}, w) = \langle f, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V_{\ell-1}. \quad (2.1.4)$$

Mit dem Defekt d definiert durch

$$\langle d, w \rangle := \langle f, w \rangle - a(u_\ell^{(k,1)}, w) \quad \text{für alle } w \in V_{\ell-1}$$

lautet das Problem analog: finde $\tilde{v}_{\ell-1} \in V_{\ell-1}$ als Lösung von

$$a(\tilde{v}_{\ell-1}, w) = \langle d, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V_{\ell-1}. \quad (2.1.4a)$$

Dies ist die Gleichung für den Defekt auf Level $\ell - 1$. Ist insbesondere $u_\ell^{(k,1)}$ schon Lösung von $(V_{\ell-1})$, so ist $d = 0$. In diesem Fall folgt $\tilde{v}_{\ell-1} \equiv 0$, d.h. keine Grobgitterkorrektur.

(Schreibe folgendes gleich eleganter in Matrix-Vektor-Form)

Einsetzen von $w = \phi_{\ell-1,i}$ liefert

$$a(\tilde{v}_{\ell-1}, \phi_{\ell-1,i}) = \langle d, \phi_{\ell-1,i} \rangle \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N_{\ell-1}$$

und Einsetzen der Darstellung (2.1.2) für $\phi_{\ell-1,i}$ auf beiden Seiten liefert

$$\sum_{j=1}^{N_\ell} r_{ij} a(\tilde{v}_{\ell-1}, \phi_{\ell,j}) = \sum_{j=1}^{N_\ell} r_{ij} \langle d, \phi_{\ell,j} \rangle.$$

Wegen

$$\tilde{v}_{\ell-1} = \sum_{m=1}^{N_{\ell-1}} (\tilde{v}_{\ell-1})_m \phi_{\ell-1,m} \quad (2.1.5)$$

folgt (wobei wir auf der rechten Seite die Definition des Defekts einsetzen)

$$\sum_{j=1}^{N_\ell} r_{ij} \sum_{m=1}^{N_{\ell-1}} a(\phi_{\ell-1,m}, \phi_{\ell,j}) (\tilde{v}_{\ell-1})_m = \sum_{j=1}^{N_\ell} r_{ij} (\langle f, \phi_{\ell,j} \rangle - a(u_\ell^{(k,1)}, \phi_{\ell,j})).$$

Erneutes Ausnutzen der Verfeinerungsgleichung, zusammen mit (2.1.5) ergibt

$$\sum_{j=1}^{N_\ell} \sum_{t=1}^{N_\ell} \sum_{m=1}^{N_{\ell-1}} r_{ij} a(\phi_{\ell,t}, \phi_{\ell,j}) r_{mt} (\tilde{v}_{\ell-1})_m = \sum_{j=1}^{N_\ell} r_{ij} (\langle f, \phi_{\ell,j} \rangle - a(u_\ell^{(k,1)}, \phi_{\ell,j})).$$

Mit $(A_\ell)_{jt} := a(\phi_{\ell,t}, \phi_{\ell,j})$ ist dies äquivalent zu

$$(rA_\ell r^T) \tilde{\mathbf{v}}_{\ell-1} = r \mathbf{d}_\ell. \quad (2.1.6)$$

Hierbei sind $\tilde{\mathbf{v}}_{\ell-1}$ der Vektor der Entwicklungskoeffizienten von $\tilde{v}_{\ell-1}$ bezüglich der Basis $\{\phi_{\ell-1,m} \mid m = 1, \dots, N_{\ell-1}\}$ und $\mathbf{d}_\ell := \mathbf{f}_\ell - A_\ell \mathbf{u}_\ell^{(k,1)}$. In diesem Fall ist $A_{\ell-1} = rA_\ell r^T$ dieselbe Matrix wie $((a(\phi_{\ell-1,m}, \phi_{\ell-1,t}))_{m,t})$. Nach der Grobgitterkorrektur ergibt sich somit

$$\mathbf{u}_\ell^{(k,2)} = \mathbf{u}_\ell^{(k,1)} + p \tilde{\mathbf{v}}_{\ell-1}. \quad (2.1.7)$$

Damit lautet MGM_ℓ (k -ter Zyklus auf Level $\ell \geq 1$) in der Matrix–Vektor–Form: Sei $\mathbf{u}_\ell^{(k)}$ eine gegebene Näherung in V_ℓ .

2 Multigridmethoden

1) Preconditioning:

$$\mathbf{u}_\ell^{(k,1)} = S^{\nu_1} \mathbf{u}_\ell^{(k)}$$

2) Coarse-Grid-Correction: Berechne das Residuum $\mathbf{d}_\ell = \mathbf{f}_\ell - A_\ell \mathbf{u}_\ell^{(k,1)}$ und die Restriktion $\mathbf{f}_{\ell-1} := r\mathbf{d}_\ell$. Löse dann

$$A_{\ell-1} \tilde{\mathbf{v}}_{\ell-1} = \mathbf{f}_{\ell-1}$$

mit $A_{\ell-1} = rA_\ell r^T$ wie folgt:

für $\ell = 0$ direkt, dann ist $\hat{\mathbf{v}}_{\ell-1} = \tilde{\mathbf{v}}_{\ell-1}$,

für $\ell > 0$ berechne eine Approximation $\hat{\mathbf{v}}_{\ell-1}$ von $\tilde{\mathbf{v}}_{\ell-1}$ durch μ -fache Anwendung von $MGM_{\ell-1}$ mit Anfangswert 0.

Setze dann

$$\mathbf{u}_\ell^{(k,2)} := \mathbf{u}_\ell^{(k,1)} + p\hat{\mathbf{v}}_{\ell-1}.$$

3) Post-Smoothing:

$$\mathbf{u}_\ell^{(k,3)} = S^{\nu_2} \mathbf{u}_\ell^{(k,2)}$$

und

$$\mathbf{u}_\ell^{(k+1)} := \mathbf{u}_\ell^{(k,3)}.$$

In der klassischen Multigrid-Theorie leitet man r wie folgt her: r und p lassen sich über Interpolation definieren: Sei $\{\phi_{\ell,i} : i\}$ eine nodale Basis von V_ℓ , d.h.

$$\phi_{\ell,i}(\mathbf{z}_{\ell,k}) = \delta_{ik} \quad i, k = 1, \dots, N_\ell. \quad (2.1.8)$$

Dann gilt für $v \in V_\ell$

$$v = \sum_{k=1}^{N_\ell} v(\mathbf{z}_{\ell,k}) \phi_{\ell,k}.$$

Also folgt mit der Wahl $v = \phi_{\ell-1,i} \in V_{\ell-1}$

$$\phi_{\ell-1,i} = \sum_{k=1}^{N_\ell} \phi_{\ell-1,i}(\mathbf{z}_{\ell,k}) \phi_{\ell,k}, \quad i = 1, \dots, N_{\ell-1}, \quad (2.1.9)$$

da $V_{\ell-1} \subset V_\ell$. D.h. mit (2.1.2) folgt

$$r_{ik} = \phi_{\ell-1,i}(\mathbf{z}_{\ell,k}), \quad k = 1, \dots, N_\ell, \quad i = 1, \dots, N_{\ell-1}. \quad (2.1.10)$$

Diese Definition des Restriktionsoperators ist auch gültig für unstrukturierte, also nicht uniforme Gitter. Man benötigt allerdings immer noch die Gültigkeit von $V_{\ell-1} \subset V_\ell$.

2.2 Konvergenz von Multigridverfahren (klassische Theorie)

Ein Multigridverfahren hat *Multigrid-Konvergenz*, wenn der Fehler in jedem Iterationszyklus mindestens um einen Faktor $\rho < 1$ reduziert wird, wobei $\rho \neq \rho(h)$ unabhängig von der Diskretisierung ist. D.h. insbesondere, dass die Methode für $h \rightarrow 0$ nicht beliebig langsam werden kann, so wie es bei Standarditerationsverfahren der Fall ist. ρ heißt *Konvergenzrate (convergence rate)* und ist ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit. In der Praxis kann man in Standardsituationen $\rho \approx 0.1$ erwarten.

Die Konvergenztheorie besteht aus zwei Teilen (vgl. [H1]):

- *Glättungseigenschaft* (smoothing property): Es gilt die inverse Abschätzung (Bernstein–Ungleichung)

$$\|S^\nu v_h\|_X \leq h^{-\beta} \frac{1}{\nu^\gamma} \|v_h\|_Y, \quad (2.2.1)$$

wobei $v_h \in V_h$ und S ein Glätter wie in (G) sei. Dies wird kombiniert mit

- *Approximationseigenschaft* (approximation property): Es gilt die Jackson–Abschätzung

$$\|v_h - w_{2h}\|_Y \leq h^\beta \|v_h\|_X, \quad (2.2.2)$$

wobei w_{2h} eine Grobgitterapproximation von v_h auf V_{2h} sei und $\beta > 0$, $h < 1$.

Für große ν und fixiertes γ ist $\frac{h^{-\beta}}{\nu^\gamma} < 1$ und unabhängig von h . Verschiedene Beweise unterscheiden sich in der Wahl der Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ (wodurch β festgelegt wird), wobei $\|\cdot\|_X$ eine stärkere Topologie als $\|\cdot\|_Y$ erzeugt. (Z.B. kann man wählen $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{H^1}$ und $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{L_2}$, was $\beta = 1$ impliziert.) Die Paare X und Y müssen so zusammenpassen, wie in Bemerkung 1.3.5 beschrieben. Man benötigt also zwei Maße, um den Fehler zu messen: Die Größe des Fehlers im Sinne von (2.2.2) und die Glattheit des Fehlers im Sinne von (2.2.1).

Wir beweisen im Folgenden die Konvergenz des Zwei–Gitter–Verfahrens unter folgenden Annahmen (2.2.3):

- das Randwertproblem ist $H^1(\Omega)$ – oder $H_0^1(\Omega)$ –elliptisch;
- das Randwertproblem ist $H^2(\Omega)$ –regulär, d.h. es gilt $u \in H^2(\Omega)$; wird benötigt für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (V);
- es ist $V_{2h} \subset V_h \subset H^1(\Omega)$;
- es werden nodale (stückweise lineare und stetige) Basen verwendet wie in (2.1.8):

$$\phi_{h,k}(\mathbf{z}_{h,i}) = \delta_{ki}.$$

Diskrete Normen

In diesem Abschnitt werden je nach Bedarf die Schreibweisen $V_h \hat{=} V_\ell$ und $V_{2h} \hat{=} V_{\ell-1}$ synonym benutzt. Bisher wurde die Qualität der Approximation (Standard–Fehlerabschätzungen, Jackson–Ungleichung, etc.) in einer höheren Sobolev–Norm gemessen, wie etwa

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

wobei u Lösung von (V) sei. Für die Approximationsabschätzung (2.2.2) ist $\|X\|_{H^2}$ nicht geeignet, da $V_h \not\subset H^2(\Omega)$. Wir nutzen daher eine alternative Hilbert–Skala auf dem N_h –dimensionalen Teilraum V_h , die die Sobolev–Skala repräsentiert.

Beachte, dass für symmetrisch positiv definites $A = A_h$ die Matrix A^s für alle $s \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. D.h. A besitzt ein vollständiges System von Eigenvektoren $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,N}$ mit $A\mathbf{e}^i = \lambda\mathbf{e}^i$ und $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = \delta_{ij}$, wobei (\cdot, \cdot) das Euklidische Skalarprodukt bezeichne. Für jedes $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{e}^i \in \mathbb{R}^N$ folgt damit

$$A^s \mathbf{x} = A^s \left(\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{e}^i \right) = \sum_{i=1}^N c_i A^s \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^s \mathbf{e}^i \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}. \quad (2.2.4)$$

Daher definieren wir für $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch, positiv definit und $s \in \mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^N eine Norm durch

$$\|\mathbf{x}\|_s := (\mathbf{x}, A^s \mathbf{x})^{1/2}, \quad (2.2.5)$$

2 Multigridmethoden

wobei (\cdot, \cdot) das Euklidische Skalarprodukt sei. Beachte, dass mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$

$$\|\mathbf{x}\|_s = \left\| A^{s/2} \mathbf{x} \right\| \quad (2.2.6)$$

gilt, denn

$$\|\mathbf{x}\|_s^2 = (\mathbf{x}, A^s \mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^N c_j \lambda_j^s \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \lambda_i^s = \sum_{i=1}^N (c_i \lambda_i^{s/2})^2 = \left\| A^{s/2} \mathbf{x} \right\|^2.$$

Eigenschaften 2.2.7 (von $\|\cdot\|_s$). (i) Für $s = 0$ entspricht $\|\cdot\|_s$ der Euklidischen Norm, also

$$\|\mathbf{x}\|_0 \equiv \|\mathbf{x}\| \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) „Logarithmische Konvexität“: Für $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $s = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}t$ gilt

$$\|\mathbf{x}\|_s \leq \|\mathbf{x}\|_r^{1/2} \|\mathbf{x}\|_t^{1/2}$$

und

$$|(\mathbf{x}, A^s \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_r \|\mathbf{y}\|_t$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, denn zunächst gilt

$$|(\mathbf{x}, A^s \mathbf{y})| = |(A^{r/2} \mathbf{x}, A^{t/2} \mathbf{y})| \leq \left\| A^{r/2} \mathbf{x} \right\| \left\| A^{t/2} \mathbf{y} \right\| = \|\mathbf{x}\|_r \|\mathbf{y}\|_t.$$

Die erste der behaupteten Ungleichungen folgt dann aus der zweiten mit $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ und durch Radizieren, d.h.

$$\|\mathbf{x}\|_s = |(\mathbf{x}, A^s \mathbf{x})|^{1/2} \leq \|\mathbf{x}\|_r^{1/2} \|\mathbf{x}\|_t^{1/2}.$$

Diese Eigenschaft heißt logarithmische Konvexität wegen folgender Interpretation: für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ist $f(s) = \log \|\mathbf{x}\|_s$ konvex, denn aus der ersten Ungleichung folgt

$$f(s) = \log \|\mathbf{x}\|_s \leq \log(\|\mathbf{x}\|_r^{1/2} \|\mathbf{x}\|_t^{1/2}) \leq \frac{1}{2}(\log \|\mathbf{x}\|_r + \log \|\mathbf{x}\|_t) = \frac{1}{2}f(r) + \frac{1}{2}f(t).$$

Aus der Stetigkeit von f folgt nun die Konvexität.

(iii) Monotonie: Sei $\alpha_1 > 0$ Elliptizitätskonstante, d.h.

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \geq \alpha_1 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Es gilt für $t \geq s$

$$\alpha_1^{-t/2} \|\mathbf{x}\|_t \geq \alpha_1^{-s/2} \|\mathbf{x}\|_s,$$

denn speziell für $\alpha_1 = 1$ gilt mit (2.2.6)

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^N (c_i \lambda_i^{s/2})^2 \leq \|\mathbf{x}\|_t^2,$$

da $1 = \alpha_1 \leq \lambda_i$ und $\lambda_i^{s/2} \leq \lambda_i^{t/2}$ für $s \leq t$. Für $\alpha_1 \neq 1$ folgt die Eigenschaft über

$$\alpha_1^{-t} \|\mathbf{x}\|_t^2 = (\mathbf{x}, (\alpha_1^{-1} A)^t \mathbf{x}) = \left\| (\alpha_1^{-1} A)^{t/2} \mathbf{x} \right\|^2 \geq \left\| (\alpha_1^{-1} A)^{s/2} \mathbf{x} \right\|^2 = \alpha_1^{-s} \|\mathbf{x}\|_s^2.$$

(iv) Shift-Eigenschaft: die Lösung \mathbf{x} von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllt

$$\|\mathbf{x}\|_{s+2} = \|\mathbf{b}\|_s \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R},$$

denn

$$\|\mathbf{x}\|_{s+2}^2 = (\mathbf{x}, A^{s+2}\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, A^s A\mathbf{x}) = (\mathbf{b}, A^s \mathbf{b}) = \|\mathbf{b}\|_s^2.$$

Mit $\|\cdot\|_s$ kann man jetzt ohne weitere Annahmen folgende Glättungseigenschaft der Richardson-Iteration zeigen:

Lemma 2.2.8. Für den Relaxationsparameter $\omega \geq \lambda_{\max}(A)$ für die Richardson-Relaxation nehme an

$$\mathbf{x}^{\nu+1} = \left(I - \frac{1}{\omega}A\right)\mathbf{x}^\nu.$$

Dann gilt für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$

$$\|\mathbf{x}^\nu\|_{s+t} \leq c\nu^{-t/2} \|\mathbf{x}^0\|_s \quad (2.2.9)$$

mit

$$c = \left(\frac{t\omega}{2e}\right)^{t/2}.$$

Beweis: Betrachte die Entwicklung von \mathbf{x}^0 in einer Orthonormalbasis von A , d.h. $\mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^N c_i e^i$.

Daraus folgt

$$\mathbf{x}^\nu = \left(I - \frac{1}{\omega}A\right)^\nu \mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^N c_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega}\right)^\nu e^i.$$

Damit ist

$$\|\mathbf{x}\|_{s+t}^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{s+t} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega}\right)^{2\nu} c_i^2 = \omega^t \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i}{\omega}\right)^t \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega}\right)^{2\nu} \lambda_i^s c_i^2,$$

was wegen $0 < \frac{\lambda_i}{\omega} =: \xi \leq 1$ abgeschätzt werden kann zu

$$\leq \omega^t \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{\xi^t (1 - \xi)^{2\nu}\} \sum_{i=1}^N \lambda_i^s c_i^2. \quad (2.2.10)$$

Wir schätzen nun den Term $\omega^t \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{\xi^t (1 - \xi)^{2\nu}\}$ weiter ab. Bestimme dazu $\max_{0 \leq \xi \leq 1} f(\xi)$ mit $f(\xi) = \xi^t (1 - \xi)^{2\nu}$. Es ist bekannt, dass $\max_{0 \leq \xi \leq 1} g(\xi)$ mit $g(\xi) = \xi(1 - \xi)^p$ in $\xi_{\max} = \frac{1}{p+1}$ angenommen wird. Außerdem gilt

$$g\left(\frac{1}{p+1}\right) \leq \frac{1}{pe},$$

denn es gilt $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}$. Dies ist richtig, denn offensichtlich gilt $e = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}$. Zu zeigen ist nun also noch, dass die Ableitung der Funktion $h(p) := \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}$ kleiner oder gleich Null ist, für alle $p > 0$. Dazu berechne $h'(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} - \frac{(p+1)\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p}{p^2}$.

2 Multigridmethoden

Nehmen wir nun an, es gilt $h'(p) \leq 0$, so ist

$$\begin{aligned}
& \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} - \frac{(p+1)\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p}{p^2} \leq 0 \\
\iff & \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{p+1}{p^2} \\
\iff & \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p} \\
\iff & 1 + \frac{1}{p} = \exp^{1/p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k k!} = 1 + \frac{1}{p} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k k!} \\
\iff & 0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k k!}.
\end{aligned}$$

Da nun $p > 0$ ist, konvergiert die Summe gegen 0, und somit ist wie behauptet $h'(p) \leq 0$ für $p > 0$ und damit ist $h(p)$ eine monoton fallende Funktion und obige Ungleichung gilt.

Mit $p = \frac{2\nu}{t}$ und $f(\xi) = (g(\xi))^t$ folgt nun

$$f(\xi_{\max}) = g(\xi_{\max})^t \leq \left(\frac{1}{2\frac{\nu}{t}e}\right)^t = \left(\frac{t}{2\nu e}\right)^t.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\|\mathbf{x}^\nu\|_{s+t}^2 \leq \left(\frac{t}{2\nu e}\right)^t \omega^t \|\mathbf{x}^0\|_s^2.$$

■

Das folgende Lemma klärt den Zusammenhang zwischen $\|\cdot\|_s$ und der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^s}$.

Lemma 2.2.11. Sei \mathcal{T}_h eine Familie uniformer Zerlegungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Elementräumen V_h . Sei $\{\phi_{h,i} \mid i \in I\}$ eine normalisierte nodale Basis von V_h , d.h.

$$\phi_{h,i}(\mathbf{z}_{h,j}) = h^{-n/2} \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, \dots, N_h \quad (2.2.11b)$$

mit $\mathbf{z}_{h,j} \in \mathcal{T}_h$. Dann ist für $v_h \in V_h$

$$\|v_h\|_0 = \left(h^n \sum_i (v_h(\mathbf{z}_{h,i}))^2\right)^{1/2}.$$

Desweiteren gilt

$$\|v_h\|_{L_2(\Omega)} \sim \|v_h\|_0 \quad (2.2.11a)$$

unabhängig von h .

Im Folgenden beschränken wir uns auf den Rahmen der Randwertprobleme zweiter Ordnung (V). Für $v_h \in V_h$ gelte wie in (2.2.5)

$$\|v_h\|_s = (v_h, A^s v_h).$$

Insbesondere ist

$$\|v_h\|_1^2 = (v_h, A_h v_h) = a(v_h, v_h) \sim \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ für alle } v_h \in V_h. \quad (2.2.12)$$

Zusammenfassend: für $s = 0, 1$ sind $\|\cdot\|_s$ und $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$ äquivalente Normen. Dies gilt aber für $s > 1$ nicht mehr. Damit erhalten wir

2.2 Konvergenz von Multigridverfahren (klassische Theorie)

Lemma 2.2.13. Es gelten die Voraussetzungen aus Lemma 2.2.11. Dann gilt für die Eigenwerte und die Konditionszahl von A_h

$$\lambda_{\min}(A_h) \lesssim 1, \quad \lambda_{\max}(A_h) \lesssim h^{-2},$$

woraus

$$\kappa_2(A_h) \leq h^{-2} \tag{2.2.14}$$

folgt.

Beachte: Diese Abschätzungen sind scharf in dem Sinne, dass h^{-2} nicht verbessert werden kann.

Beweis: Da A_h symmetrisch positiv definit ist, folgt

$$\lambda_{\max}(A_h) = \sup_{v_h \in \mathbb{R}^n} \frac{(v_h, A_h v_h)}{(v_h, v_h)} = \sup_{v_h \in \mathbb{R}^n} \frac{\|v_h\|_1^2}{\|v_h\|_0^2} \lesssim \sup_{v_h \in V_h} \frac{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2}{\|v_h\|_{L_2(\Omega)}^2} \leq h^{-2}.$$

Entsprechend gilt

$$\lambda_{\min}(A_h) = \inf_{v_h \in \mathbb{R}^n} \frac{(v_h, A_h v_h)}{(v_h, v_h)} \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \frac{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2}{\|v_h\|_{L_2(\Omega)}^2} \lesssim 1,$$

was $\kappa(A_h) \leq h^{-2}$ impliziert. ■

Damit folgern wir

Korollar 2.2.15 (Glättungseigenschaft). Die Richardson–Relaxation

$$\mathbf{x}^{\nu+1} = \left(I - \frac{1}{\omega} A_h\right) \mathbf{x}^\nu$$

mit $\omega = \lambda_{\max}(A_h)$ erfüllt

$$\|\mathbf{x}^\nu\|_2 \leq \frac{h^{-2}}{\nu} \|\mathbf{x}^0\|_0. \tag{2.2.16}$$

Beweis: Anwendung von Lemma 2.2.8 mit $s = 0$, $t = 2$ liefert

$$c = \left(\frac{t}{2e} \lambda_{\max}(A_h)\right)^{t/2} = \frac{\lambda_{\max}(A_h)}{e}$$

und $\nu^{-t/2} = \nu^{-1}$. ■

Approximationseigenschaft

Die Qualität der Grobgitterkorrektur kann in $\|\cdot\|_2$ gemessen werden. Wesentliches Hilfsmittel ist hier das Dualitätsargument von Aubin–Nitsche (siehe *Wissenschaftliches Rechnen II*, Kapitel 2).

Lemma 2.2.17. Sei $v_h \in V_h$ und $u_{2h} \in V_{2h}$ schwache Lösung von

$$a(v_h - u_{2h}, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in V_{2h}. \tag{2.2.17a}$$

Sei Ω konvex oder habe glatten Rand. Dann gilt

$$\|v_h - u_{2h}\|_{H^1(\Omega)} \lesssim 2h \|v_h\|_2 \tag{2.2.18}$$

und

$$\|v_h - u_{2h}\|_{L_2(\Omega)} \leq 2h \|v_h - u_{2h}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.2.19}$$

2 Multigridmethoden

Beweis: Das Problem ist H^2 -regulär. Somit liefert das Aubin–Nitsche–Argument Gleichung (2.2.19). Für (2.2.18) betrachte

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \|v_h - u_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(v_h - u_{2h}, v_h - u_{2h}) \\
 &= a(v_h - u_{2h}, v_h) \\
 &= (v_h - u_{2h}, Av_h) \\
 &\leq \|v_h - u_{2h}\|_0 \|v_h\|_2 \\
 &\lesssim \|v_h - u_{2h}\|_{L_2(\Omega)} \|v_h\|_2 \\
 &\leq 2h \|v_h - u_{2h}\|_{H^1(\Omega)} \|v_h\|_2.
 \end{aligned}$$

Division durch $\|v_h - u_{2h}\|_{H^1(\Omega)}$ liefert die Behauptung. ■

Konvergenzbeweis der Zweigittermethode

Korollar 2.2.15 und Lemma 2.2.17 ergeben Glättungseigenschaft (2.2.1) und Approximationseigenschaften (2.2.2) mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_Y := \|\cdot\|_0$, $\beta = 2$ und $\gamma = 1$. D.h.

$$\|S^\nu v_h\|_2 \lesssim \frac{h^{-2}}{\nu} \|v_h\|_0$$

und

$$\|v_h - u_{2h}\|_0 \leq h^2 \|v_h\|_2.$$

Satz 2.2.20 (Konvergenz der Zweigittermethode). Es gelten die Voraussetzungen (2.2.3). Dann gilt für die Zweigittermethode mit Richardson–Iteration als Glätter (d.h. ω so, dass $\lambda_{\max}(A_h) \leq \omega \leq \lambda_{\max}(A_h)$ ist):

$$\left\| u_h^{(k+1)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)} \lesssim \frac{1}{\nu_1} \left\| u_h^{(k)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)},$$

wobei ν_1 die Anzahl der Vorglättungsschritte ist.

Hier werden also zwei Lösungen nach einem Durchlauf der Zweigittermethode verglichen.

Beweis: Die Definition der Richardson–Iteration ergibt für einen Vorglättungsschritt nach Lemma 2.2.19a (**noch hinzuzufügen**)

$$u_h^{(k,1)} - u_h = \left(I - \frac{1}{\omega} A\right)^{\nu_1} (u_h^{(k)} - u_h).$$

Mit Korollar 2.2.15 und (2.2.11b) folgt

$$\left\| u_h^{(k,1)} - u_h \right\|_2 \lesssim \frac{h^{-2}}{\nu_1} \left\| u_h^{(k)} - u_h \right\|_0 \lesssim \frac{h^{-2}}{\nu_1} \left\| u_h^{(k)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.2.21)$$

Nach Definition der Grobgitterkorrektur ist $u_h^{(k,2)} = u_h^{(k,1)} + u_{2h}$, wobei u_{2h} Lösung von (2.1.3)

$$a(u_h^{(k,1)} + u_{2h}, w) = \langle f, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V_{2h},$$

ist. Weiter löst u_h die Variationsaufgabe

$$a(u_h, w) = \langle f, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V_h.$$

Wegen $V_{2h} \subset V_h$ und liefert die Subtraktion der beiden Gleichungen

$$a(u_h^{(k,1)} + u_{2h} - u_h, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in V_{2h}.$$

2.2 Konvergenz von Multigridverfahren (klassische Theorie)

Anwendung von Lemma 2.2.17 für $V_h := u_h^{(k,1)} - u_h$ liefert

$$\left\| u_h^{(k,2)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)} \leq h \left\| u_h^{(k,2)} - u_h \right\|_{H^1(\Omega)} \leq h^2 \left\| u_h^{(k,1)} - u_h \right\|_2 \quad (2.2.22)$$

Das Postsmoothing schätzen wir nur grob ab: Es gilt

$$\left\| \left(I - \frac{1}{\omega} A \right) x \right\|_s \leq \|x\|_s,$$

da das Richardson–Verfahren konvergent ist. Daraus folgt

$$\left\| u_h^{(k,3)} - u_h \right\|_0 \leq \left\| u_h^{(k,2)} - u_h \right\|_0$$

und aufgrund der Äquivalenz der Normen folgt weiter

$$\left\| u_h^{(k+1)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \left\| u_h^{(k,2)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)} \leq h^2 \left\| u_h^{(k,1)} - u_h \right\|_2 \leq h^2 h^{-2} \frac{1}{\nu_h} \left\| u_h^{(k)} - u_h \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

■

Alternativer Kurzbeweis: (für eine geringere Konvergenzrate $\nu_1^{-1/2}$ und ohne $\|\cdot\|_s$) Beachte, dass die Glättungs- und Approximationseigenschaft für $X := H^1(\Omega)$ und $Y := L_2(\Omega)$, d.h. $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$, mit $\beta = 1$ und $\gamma = 1/2$ gelten. Die Approximationseigenschaft (2.1.2) folgt aus dem Aubin–Nitsche–Lemma

$$\|v_h - u_{2h}\|_{L_2(\Omega)} \leq h \|v_h - u_{2h}\|_{H^1(\Omega)} \leq h \|v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Weiterhin kann Lemma 2.2.8 für die Richardson–Iteration für $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ auch ohne $\|\cdot\|_s$ gezeigt werden. Es ist

$$\|x^{\nu_1}\|_{H^1(\Omega)} \leq \nu_1^{-1/2} \|x^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

(Nutze hierzu $\|v\|_{H^1(\Omega)} \sim a(v, v) = (Av, v)$ und die ON–Basis–Darstellung $x^0 = \sum c_i e_i$ aus.) Der Rest des Beweises folgt wie vorher. ■

Variante in Matrixform

Wir verwenden die Terminologie aus [H1]. Insbesondere gehöre A_h zum feinen Gitter und A_{2h} zum groben Gitter. Die Matrixdarstellung der Zweigitteriteration ist

$$u_h^{(k+1)} - u_h = M(u_h^{(k)} - u_h) \quad (2.2.23)$$

mit

$$M := S^{\nu_2} (I - pA_{2h}^{-1}rA_h) S^{\nu_1} = S^{\nu_2} (A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r) A_h S^{\nu_1},$$

wobei $pA_{2h}^{-1}r$ die Grobgitterkorrektur beschreibt. Die Voraussetzung der Approximations- und Glättungseigenschaften lässt sich in der Form

$$\|A_h S^{\nu_1}\| \leq C \frac{h^{-2}}{\nu_1} \quad \|A^{-1} - pA_{2h}^{-1}r\| \leq Ch^2 \quad (2.2.24)$$

formulieren. Mit $\|S\| < 1$ folgt die Kontraktionseigenschaft

$$\|M\| \leq C \frac{1}{\nu_1} < 1$$

für ν_1 genügend groß, d.h. die Vorglättung ist entscheidend. Der Beweis von (2.2.24) folgt hinsichtlich der Glättungseigenschaft wie in Lemma 2.2.8 und hinsichtlich der Approximationseigenschaft wie in Lemma 2.2.13 mit $\|Ax\|_0 = \|x\|_2$.

2.3 Konvergenz bei mehr als zwei Level

Beim Konvergenzbeweis der Zweigittermethode wurde die Grobgitterkorrektur über einen exakten Löser berechnet. Dies funktioniert nicht mehr für mehr als zwei Level. Daher interpretiert man Mehrgitterverfahren mit mehr als zwei Level als „gestörte“ Zweigittermethoden und schätzt die Größe der Störung ab.

Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung der Konvergenzrate ϱ_ℓ für Mehrgittermethoden mit ℓ Wechseln von Gittern, d.h. mit $\ell + 1$ -vielen Gittern. Also

$$\left\| u_\ell^{(k+1)} - u_\ell \right\| \leq \varrho_\ell \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\|, \quad (2.3.1)$$

wobei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm bezeichnet. Sei $u_\ell \in V_\ell$ die gewünschte Lösung von $A_\ell u_\ell = f_\ell$ auf dem feinsten Level ℓ .

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Konvergenzrate ϱ_1 der Zweigittermethode bekannt ist (z.B. aus Satz 2.2.20 $\varrho_1 = \nu_1^{-1}$). Die Strategie ist nun, ϱ_ℓ aus ϱ_1 durch Induktion zu berechnen.

Eine Rekursionsformel für ϱ_ℓ für den W-Zyklus

Eine Glättung mit der Richardson-Iteration liefert offenbar

$$\left\| u_\ell^{(k,1)} - u_\ell \right\| \leq \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\|.$$

Im Folgenden sei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_s$. Wir vergleichen die tatsächlich berechnete Grobgitterkorrektur $u_\ell^{(k,2)}$ mit der exakten Grobgitterkorrektur $\hat{u}_\ell^{(k,2)}$. Wir wissen bereits

$$\left\| \hat{u}_\ell^{(k,2)} - u_\ell \right\| \leq \varrho_1 \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\| \quad (2.3.2)$$

Zusammen mit (2.3.1) ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left\| u_\ell^{(k,1)} - \hat{u}_\ell^{(k,2)} \right\| &\leq \left\| u_\ell^{(k,1)} - u_\ell \right\| + \left\| u_\ell - \hat{u}_\ell^{(k,2)} \right\| \\ &\leq \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\| + \varrho_1 \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\| \\ &= (1 + \varrho_1) \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\|. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Die tatsächliche Grobgitterkorrektur unterscheidet sich von der berechneten Grobgitterkorrektur nur durch den Fehler auf Level $\ell - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist der relative Fehler auf Level $\ell - 1$ höchstens $\varrho_{\ell-1}^\mu$, d.h.

$$\left\| u_\ell^{(k,2)} - \hat{u}_\ell^{(k,2)} \right\| \leq \varrho_{\ell-1}^\mu \left\| u_\ell^{(k,1)} - \hat{u}_\ell^{(k,2)} \right\|, \quad (2.3.4)$$

wobei $\mu = 1$ für einen V-Zyklus und $\mu = 2$ für einen W-Zyklus steht. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left\| u_\ell^{(k,2)} - u_\ell \right\| &\leq \left\| u_\ell^{(k,2)} - \hat{u}_\ell^{(k,2)} \right\| + \left\| \hat{u}_\ell^{(k,2)} - u_\ell \right\| \\ &\leq \varrho_{\ell-1}^\mu \left\| u_\ell^{(k,1)} - \hat{u}_\ell^{(k,2)} \right\| + \varrho_1 \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\| \\ &\leq \varrho_{\ell-1}^\mu (1 + \varrho_1) \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\| + \varrho_1 \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\| \\ &\leq (\varrho_{\ell-1}^\mu (1 + \varrho_1) + \varrho_1) \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\|. \end{aligned}$$

Anschließend wird aufdatiert $u_\ell^{(k+1)} = u_\ell^{(k;2)}$. Speziell für den W-Zyklus ist

$$\left\| u_\ell^{(k+1)} - u_\ell \right\| \leq (\varrho_{\ell-1}^2(1 + \varrho_1) + \varrho_1) \left\| u_\ell^{(k)} - u_\ell \right\|.$$

Die Konvergenzrate für den W-Zyklus ist dann ϱ_ℓ mit

$$\varrho_\ell \leq \varrho_{\ell-1}^2(1 + \varrho_1) + \varrho_1.$$

Damit haben wir folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 2.3.5 (Rekursionsformel für W-Zyklus). Für die Mehrgittermethode MGM_ℓ mit W-Zyklus und Level $\ell \geq 2$ ergibt sich für die Konvergenzrate ϱ_ℓ in (2.3.1) die Abschätzung

$$\varrho_\ell \leq \varrho_{\ell-1}^2(1 + \varrho_\ell) + \varrho_1. \quad (2.3.6)$$

Damit ist die Konvergenzrate unabhängig von ℓ , solange ϱ_1 genügend klein ist, d.h. genügend viele Iterationsschritte im Presmoothing gemacht werden.

Satz 2.3.7 (Konvergenz MGM_ℓ mit W-Zyklus). Für die Konvergenzrate der Zweigittermethode gelte $\varrho_1 \leq \frac{1}{5}$. Dann ist die Konvergenzrate für den W-Zyklus

$$\varrho_\ell \leq \frac{5}{3}\varrho_1 \leq \frac{1}{3} \quad \text{für } \ell = 2, 3, \dots$$

Beweis: Der Induktionsanfang $\ell = 1$ ist klar. Für den Induktionsschluss $(\ell - 1) \rightarrow \ell$ betrachte

$$\varrho_\ell \leq \varrho_{\ell-1}^2(1 + \varrho_1) + \varrho_1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{3}.$$

Damit gilt: Ist die Anzahl der Glättungsschritte im Presmoothing groß genug, so ist $\varrho_1 \leq \frac{1}{5}$. Also folgt die Konvergenz mit Satz 2.2.20 unter denselben Voraussetzungen. ■

Für die Energienorm $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ lässt sich eine erheblich bessere Rekursionsformel beweisen: Für MGM_ℓ mit $\mu = 1$ (V-Zyklus) und $\mu = 2$ (W-Zyklus) gilt

$$\varrho_\ell^2 \leq \varrho_1^2 + \varrho_{\ell-1}^{2\mu}(1 - \varrho_1^2) \quad \text{für } \ell \geq 2. \quad (2.3.8)$$

Satz 2.3.9. Erfüllt die Konvergenzrate der Zweigittermethode $\varrho_1 \leq \frac{1}{2}$, so folgt

$$\varrho_\ell \leq \frac{6}{5}\varrho_1 \leq 0.6 \quad \text{für } \ell \geq 2$$

im Fall des W-Zyklus.

Aufgrund der Rekursionsformel (2.3.8) kann man für den V-Zyklus und z.B. für $\varrho_1 = \frac{1}{5}$ nur $\sup \varrho_\ell = 1.0$ zeigen. Die Werte für die ϱ_ℓ wachsen in diesem Fall äußerst schnell, wie folgende Tabelle zeigt:

ℓ	1	2	3	4	5	$\sup \varrho_\ell$
W-Zyklus	0.2	0.2038	0.2041	0.2042	0.2042	$\frac{6}{5}\varrho_1$
V-Zyklus	0.2	0.280	0.340	0.389	0.430	1.0

(2.3.10)

In der Energienorm kann man für den V-Zyklus eine bessere Konvergenzrate als 1 zeigen.

Konvergenzbeweis für den V–Zyklus

Es ist möglich, eine kleinere Konvergenzrate als 1 für den V–Zyklus zu beweisen unabhängig von der Anzahl der Level. Dazu braucht man allerdings ein verfeinertes Argument. Dies hat aber den zusätzlichen Vorteil, dass man nur einen Glättungsschritt braucht. Wir führen den Beweis für die Energienorm

$$\|v_h\| := \|v_h\|_1 = (v_h, A_h v_h)^{1/2} \sim \|v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Satz 2.3.11 (Konvergenz MGM_ℓ (Braess, Hackbusch 1983)). Es gelten die Voraussetzungen aus (2.2.3). Dann gilt für die Lösung von MGM_ℓ (V– oder W–Zyklus) und die Konvergenzrate

$$\begin{aligned} \|u_\ell^{(k+1)} - u_\ell\| &\leq \varrho_\ell \|u_\ell^{(k)} - u_\ell\| \\ \varrho_\ell &\leq \varrho_\infty := \left(\frac{c}{c + 2\nu_1}\right)^{1/2} \quad \text{für } \ell = 0, 1, 2, \dots, c \neq c(\ell, \nu_1) \end{aligned}$$

für die Richardson–Iteration mit $\lambda_{\max}(A) \leq \omega \leq C\lambda_{\max}(A)$ und ν_1 Vorglättungsschritten.

Der Beweis dieses Satzes basiert auf einigen Lemmata. Zunächst definieren wir das Glattheitsmaß für Funktionen in V_h :

$$\beta := \beta(v_h) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} \frac{\|v_h\|_2^2}{\|v_h\|_1^2}, & \text{falls } v_h \neq 0 \\ 0, & \text{falls } v_h = 0 \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Beachte: Es ist $0 \leq \beta \leq 1$ und β ist eine Konstante unabhängig von h , denn wegen Lemma 2.2.13 ist $\lambda_{\max}(A_h) \sim h^2$ und $\|v_h\|_2^2 \sim h^{-2} \|v_h\|_1^2$, woraus $\frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} \sim h^2$ folgt und damit

$$1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} \frac{\|v_h\|_2^2}{\|v_h\|_1^2} \sim \tilde{c}$$

unabhängig von h .

Für glatte v_h ist β nahe bei 1, da in diesem Fall $\|v_h\|_2^2 \approx \|v_h\|_1^2$. Für stark oszillierende Funktionen ist aber $\|v_h\|_2$ groß gegenüber $\|v_h\|_1$, d.h. β ist nahe bei 0.

Der Faktor β bestimmt die Menge an Glättungen in jedem Glättungsschritt. Da die Verbesserung sukzessive kleiner wird im Glättungsprozess, ist die Größe von β nach der Glättung entscheidend.

Später wird sich herausstellen, dass $\beta \equiv 1 \left(\frac{c}{c+2\nu_1}\right)^{1/2}$ liefert.

Lemma 2.3.13. Die Glättung mittels Richardson–Relaxation liefert für $\omega = \lambda_{\max}(A_h)$

$$\|S^\nu v\| \leq [\beta(S^\nu v)]^\nu \|v\| \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

Beachte: In Lemma 2.2.8 galt die Abschätzung

$$\|x^\nu\|_{s+t} \leq c\nu^{-t/2} \|x^0\|_s.$$

Hier steht auf beiden Seiten aber dieselbe (Energie–)Norm.

Beweis: Betrachte eine Spektralzerlegung von $v = \sum_i c_i e_i$, wobei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis sei, und definiere

$$\mu_i := 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}(A_h)}.$$

Die λ_i seien die Eigenwerte von A_h und nach den Voraussetzungen an $\omega = \lambda_{\max}(A_h)$ sind die μ_i Eigenwerte von S . Nun ist

$$\|S^\nu v\| = \|S^\nu v\|_1^2 = \sum_i \lambda_i \mu_i^{2\nu} |c_i|^2.$$

Mit $q = 2\nu + 1$ und $p = \frac{2\nu+1}{2\nu}$ und Ausnutzung der Hölder-Ungleichung kann man dies abschätzen zu

$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\lambda_i |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2\nu+1}} \left(\lambda_i |c_i|^2\right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \mu_i^{2\nu} \\ &\leq \left(\sum_i \left(\lambda_i |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2\nu+1}(2\nu+1)}\right)^{\frac{1}{2\nu+1}} \cdot \left(\sum_i \left(\left(\lambda_i |c_i|^2\right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \mu_i^{2\nu}\right)^{\frac{2\nu+1}{2\nu}}\right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \\ &= \left(\sum_i |c_i|^2\right)^{\frac{1}{2\nu+1}} \left(\sum_i \left(\lambda_i |c_i|^2\right) \mu_i^{2\nu+1}\right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \\ &= \|v\|_{2\nu+1}^{\frac{1}{2\nu+1}} \|S^{\nu+\frac{1}{2}} v\|_{2\nu+1}^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}. \end{aligned}$$

Damit folgt also

$$\begin{aligned} \|S^\nu v\| &\leq \|S^{\nu+\frac{1}{2}} v\|_{2\nu+1}^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \|v\|_{2\nu+1}^{\frac{1}{2\nu+1}} \\ \iff \|S^\nu v\|^{2\nu+1} &\leq \|S^{\nu+\frac{1}{2}} v\|^{2\nu} \|v\| \\ \iff \|S^\nu v\|^{2\nu} &\leq \left(\frac{\|S^{1/2}(S^\nu v)\|}{\|S^\nu v\|}\right)^{2\nu} \|v\| \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Da S selbstadjungiert ist und mit A kommutiert, folgt

$$\|S^{1/2} w\|^2 = (S^{1/2} w, AS^{1/2} w) = (w, ASw) = (w, Aw) - \frac{1}{\lambda_{\max}} (w, A^2 w) = \beta(w) \|w\|^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\|S^{1/2} w\| = \sqrt{\beta(w)} \|w\|.$$

Mit (2.3.14) und $w = S^\nu v$ folgt dann die Behauptung

$$\|S^\nu v\| \leq \left(\frac{\sqrt{\beta(S^\nu v)} \|S^\nu v\|}{\|S^\nu v\|}\right)^{2\nu} \|v\| = (\beta(S^\nu v))^\nu \|v\|.$$

■

Die Qualität der Grobgitterkorrektur kann auch mittels β abgeschätzt werden. Dazu benötigen wir

Definition 2.3.15. Setze $w^m := u_\ell^{k,m} - u_\ell$, $m = 0, 1, 2, \dots$ und $\hat{w}^m := \hat{u}_\ell^{k,m} - u_\ell$. Hierbei sind $u_\ell^{k,m}$ die berechnete und $\hat{u}_\ell^{k,m}$ die exakte Grobgitterkorrektur.

Lemma 2.3.16. Für die exakte Grobgitterkorrektur gilt

$$\|\hat{u}_\ell^{k,2} - u_\ell\| \leq \min\{c\lambda_{\max}(A)^{-1/2} \|w^1\|_2, \|w^1\|\} = \min\{c\sqrt{1 - \beta(w^1)}, 1\} \|w^1\|.$$

2 Multigridmethoden

Beweis: Wegen (2.2.18) weiß man bereits

$$\|\hat{w}^2\| = \|\hat{u}_\ell^{k,2} - u_\ell\| \leq Ch \left\| u_\ell^{(k,1)} - u_\ell \right\|_2 \leq C \frac{1}{\lambda_{\max}^{1/2}} \|w^1\|_2.$$

Desweiteren vergrößert die Grobgitterkorrektur nicht die Energienorm des Fehlers. Also folgt die Abschätzung. Die zweite Abschätzung ergibt sich mit der Definition von β aus (2.3.12). ■

Rekursionsformel 2.3.17. Unter den Voraussetzungen des Konvergenzsatzes 2.3.11 gilt

$$\varrho_\ell^2 \leq \max_{0 \leq \beta < 1} \beta^{2\nu} [\varrho_{\ell-1}^{2\mu} + (1 - \varrho_{\ell-1}^{2\mu}) \min\{1, c^2(1 - \beta)\}],$$

wobei c die Konstante aus vorigem Lemma 2.3.16 sei und $\mu = 1$ für den V-Zyklus sowie $\mu = 2$ für den W-Zyklus steht.

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 2.3.13 (Glättung) und 2.3.16 (Grogitterkorrektur) zusammen mit $\beta < 1$. ■

Beweis von Satz 2.3.11: Mit Induktion über ℓ für $\mu = 1$.

$\ell = 1$: Die Zweigittermethode erfordert nach dem alternativen Kurzbeweis von Satz 2.2.20 bei einer Konvergenzrate $\varrho_1 \sim \nu^{-1/2}$ mindestens $\nu = 2$, also $\varrho_1 < 1$.

$\ell - 1 \rightarrow \ell$: Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\varrho_{\ell-1}^2 \leq \frac{c}{c + 2\nu_1}.$$

Einsetzen in 2.3.17 ergibt

$$\begin{aligned} \varrho_\ell^2 &\leq \max_{\beta \in [0,1]} \beta^{2\nu} \left[\frac{c}{c + 2\nu_1} + (1 - \varrho_{\ell-1}^2) c^2 (1 - \beta) \right] \\ &\leq \frac{c}{c + 2\nu_1} \max_{\beta \in [0,1]} (\beta^{2\nu} (1 + c(c + 2\nu_1)(1 - \beta))) \\ &= \frac{c}{c + 2\nu_1}. \end{aligned}$$

Setze nun $f(\beta) := \beta^{2\nu} (1 + c(c + 2\nu_1)(1 - \beta))$. Dies ist eine stetige, monoton steigende Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Daher ist der max-Term immer ≤ 1 . Dies gilt für jedes ℓ , also auch für $\ell \rightarrow \infty$. ■

Beachte: bereits ein Vorglättungsschritt reicht für die Konvergenz aus.

Die folgende Tabelle zeigt die Konvergenzraten ϱ_ℓ für den V-Zyklus für $\nu_1 = 2$. Die letzte Spalte zeigt den W-Zyklus:

c	$\ell =$	1	2	3	4	5	6	7	8	∞	
0.5		.1432	.174	.189	.199	.205	.210	.214	.217	.243	.1437
1		.2862	.340	.366	.382	.392	.400	.406	.410	.448	.2904

Bemerkung. 1. Beim W-Zyklus werden niedrigfrequente Anteile effizienter behandelt als beim V-Zyklus (glatte Anteile bedeuten: β fast 1, d.h. die Abschätzung von ϱ_ℓ^2 auf der rechten Seite ist für dieses β nahe bei 1.) bei einer großen Anzahl an Level sollte man daher zwischendurch einen W-Zyklus einschieben. Beachte, dass beim W-Zyklus die Anzahl arithmetischer Operationen etwa 50% höher als beim V-Zyklus ist.

2.4 Nested Iteration (Geschachtelte Iteration, Kaskadisches Mehrgitter)

2. Aufgrund der Kontraktionsrate $\varrho_\ell \leq \left(\frac{c}{c+2\nu_1}\right)^{1/2}$ verhält sich die Kontraktion für große ν_1 wie für $\nu_1^{-1/2}$. Für Pre- und Postsmoothing mit $\nu = \nu_1 = \nu_2$ kann man zeigen, dass die Kontraktionsrate dann ν^{-1} ist. [Braess, Hackbusch, 1983]
3. Ist die Regularitätsannahme (2.2.3) nicht erfüllt, so kann man nur eine niedrige Konvergenzrate zeigen.
4. Bank, Dupont, Yserantant, [1988] benutzten Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer in cg-Verfahren bzw. als Hierarchische-Basis-Vorkonditionierer. In diesem Fall ergibt sich eine Konvergenzrate von $1 - \mathcal{O}((\log \frac{1}{h})^{-p})$ anstelle von $\mathcal{O}(h^{-2})$.

2.4 Nested Iteration (Geschachtelte Iteration, Kaskadisches Mehrgitter)

Bisher haben wir die Multigrid-Methode nur als rein iteratives Verfahren betrachtet. Die Multigrid-Idee kann aber auch zur Gewinnung von Startwerten benutzt werden.

- 1.) Die Lösung $u_{\ell-1}$ auf Level $\ell-1$ ist ein guter Startwert für die Iteration auf Level ℓ . Tatsächlich braucht die Lösung $u_{\ell-1}$ nicht exakt bestimmt zu werden. Eine gute Approximation für $u_{\ell-1}$ reicht aus.
- 2.) Eine Finite Elemente-Approximation u_h braucht nur bis auf Diskretisierungsfehlergenauigkeit $\|u_h - u\|$, nicht aber bis auf Rundungsfehlergenauigkeit bestimmt zu werden. Z.B. kann man iterative Verfahren stoppen, wenn

$$\|u_h^{(k)} - u_h\| \leq \frac{1}{2} \|u_h - u\|$$

gilt.

Mit diesen beiden Ideen lassen sich Algorithmen konstruieren, bei denen die Anzahl arithmetischer Operationen nur *linear* mit der Anzahl der Unbekannten ansteigt.

Algorithmus 2.4.1 (Nested Iteration NI_ℓ). (Zur Berechnung eines Startwerts v_ℓ auf Level $\ell \geq 0$.) Falls $\ell = 0$, bestimme $v_0 = u_0 = A_0^{-1}b_0$ und stoppe.

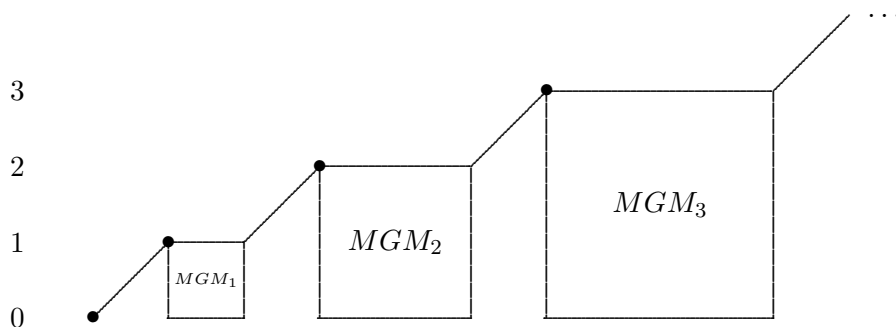
Für $\ell > 0$:

- bestimme approximative Lösung $v_{\ell-1}$ der Gleichung

$$A_{\ell-1}u_{\ell-1} = b_{\ell-1}$$

durch Anwendung von $NI_{\ell-1}$.

- bestimme Prolongation von $v_{\ell-1}$: $v_\ell^{(0)} := pv_{\ell-1}$.
- mit $v_\ell^{(0)}$ als Startwert wende q Schritte MGM_ℓ (V-Zyklus) an und setze $v_\ell = v_\ell^{(q)}$.



2 Multigridmethoden

Im Folgenden sei angenommen, dass die Konvergenzrate $\varrho = \varrho_\infty$ für MGM_ℓ $\varrho < \frac{1}{4}$ erfüllt. Dann wird nur $q = 1$ Schritt in 2.4.1 ausgeführt (ansonsten q Zyklen, so dass sich die Konvergenzrate $\varrho^q < \frac{1}{4}$ einstellt).

Satz 2.4.2. Die Finite Elemente–Approximation $u_h \in V_h$ erfülle

$$\|u - u_\ell\| \leq Ch_\ell^2 \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

und die Konvergenzrate ϱ sei kleiner $\frac{1}{4}$ bzgl. $\|\cdot\|$. Dann liefert Algorithmus 2.4.1

$$\|v_\ell - u_\ell\| \leq Ch_\ell^2 \frac{5\varrho}{1-4\varrho}.$$

Beweis: Induktion über ℓ . Es ist $v_0 = u_0$ per Definition.

$\ell - 1 \rightarrow \ell$: Die Induktionsvoraussetzung für $\ell - 1$ impliziert mit $h_{\ell-1} = 2h_\ell$

$$\|v_{\ell-1} - u_{\ell-1}\| \leq C \frac{5\varrho}{1-4\varrho} (2h_\ell)^2.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\|u - u_{\ell-1}\| \leq C(2h_\ell)^2, \quad \|u - u_\ell\| \leq Ch_\ell^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|v_\ell^{(0)} - u_\ell\| &\leq \|v_{\ell-1} - u_{\ell-1}\| + \|u_{\ell-1} - u\| + \|u - u_\ell\| \\ &\leq C \left(\frac{5\varrho}{1-4\varrho} 4h_\ell^2 + 4h_\ell^2 + h_\ell^2 \right) \\ &= C 5h_\ell^2 \left(\frac{4\varrho}{1-4\varrho} + 1 \right) = C \frac{5}{1-4\varrho} h_\ell^2. \end{aligned}$$

MGM reduziert den Fehler um den Faktor ϱ , d.h.

$$\|v_\ell - u_\ell\| \leq \varrho \|v_\ell^{(0)} - u_\ell\|.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Komplexität

Unsere Analyse betrachtet den Fall, dass die Anzahl arithmetischer Operationen für (2.4.3)

- (i) Glättung in V_ℓ (Anwendung von S),
- (ii) Prolongation von $V_{\ell-1}$ nach V_ℓ ,
- (iii) Restriktion von V_ℓ nach $V_{\ell-1}$

von der Größenordnung cN_ℓ ist, wobei $N_\ell = \dim V_\ell$ die Anzahl der Unbekannten auf Level ℓ ist. Beachte, dass die Anzahl arithmetischer Operationen für eine Anwendung von S proportional zur Anzahl der Nichtnulleinträge in A_ℓ ist. Diese ist *proportional* zur Anzahl der Unbekannten für V_ℓ für affine Finite Elemente auf uniformen Gittern. Desweiteren sind Prolongation und Restriktion noch dünner. Daraus folgt, dass die Anzahl arithmetischer Operationen auf Level $\ell \leq (\nu_1 + 1)cN_\ell$ ist, wobei ν_1 die Anzahl der Glättungsschritte ist.

2.4 Nested Iteration (Geschachtelte Iteration, Kaskadisches Mehrgitter)

Die *Kosten für MGM_ℓ* für ein Gitter $\subset \mathbb{R}^2$ über alle Level betragen daher: Transfer von Level ℓ nach $\ell - 1$ verkleinert die Anzahl Unbekannter um den Faktor $\frac{1}{4} = 2^{-2}$. Insgesamt folgt mit obigem für MGM_ℓ daher:

$$(\nu_1 + 1)c(N_\ell + N_{\ell-1} + N_{\ell-2} + \dots) \leq \frac{4}{3}(\nu_1 + 1)cN_\ell \quad \text{für den W-Zyklus und (2.4.3)}$$

$$(\nu_1 + 1)c(N_\ell + 2N_{\ell-1} + 4N_{\ell-2} + \dots) \leq 2(\nu_1 + 1)cN_\ell \quad \text{für den V-Zyklus (2.4.4)}$$

zuzüglich der Lösung von $A_0 u_0 = f_0$ auf dem größtem Level. Da dieses in der Regel sehr klein ist, wird es im Folgenden vernachlässigt.

Die Berechnung der Startwerte mit NI_ℓ kann genauso analysiert werden: Wegen $N_{\ell-1} \approx \frac{1}{4}N_\ell$ steigt der Aufwand beim Wechsel auf das nächstfeinere Gitter um den Faktor 4. Daher beträgt der Aufwand für die Berechnung eines Startwerts auf Level ℓ mit NI_ℓ $c\frac{4}{3}N_\ell$ (kein Smoothing außer in MGM_ℓ).

Bemerkung: Für die Behandlung der oszillierenden Teile in einem V-Zyklus ist es oft besser, eine symmetrische Variante von NI_ℓ zu benutzen, die *vor* und *nach* Berechnung von $A_{\ell-1}u_{\ell-1} = f_{\ell-1}$ einen Zyklus MGM_ℓ verwendet.

Full Multigrid: $NI_\ell + MGM_\ell$ ist oft noch effizienter als MGM_ℓ . Allein ist MGM_ℓ als *Vorkonditionierer* für cg-Verfahren nützlich.

Satz 2.4.5. Nested Iteration in Verbindung mit Wavelet-Ansätzen: Auf jedem Level ist $\underline{A}_\psi u = f$ zu lösen mit wohlkonditioniertem \underline{A}_ψ , d.h. nur Lösung iterativ bis auf Diskretisierungsfehlergenauigkeit berechnen (feste Anzahl Iterationen, da wohlkonditioniert); Lösung prolongieren und weiter auf nächst feineren Level rechnen.

Ein kaskadischer Multigrid-Algorithmus für Variationsungleichungen

Variationsungleichungen treten bei Kontakt- und Hindernisproblemen (Signorini's Problem) auf. Betrachte die Variationsungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} [(\nabla v)^2 - f v] dx &\rightarrow \min && \text{auf } \Omega \\ v(x) &= g(x) && \text{auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega \\ v(x) &\geq \psi(x) && \text{für } x \in \Omega_{\geq}, \end{aligned}$$

wobei $\Omega_{\geq} \subset \Omega$ oder $\Omega_{\geq} \subset \partial\Omega$. Die Lösung u ist charakterisiert durch

$$(\nabla u, \nabla(u - v)) \geq (f, v - u),$$

wobei $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_2}$ und

$$u, v \in K := \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ auf } \Omega_{\geq}, v = g \text{ auf } \Gamma_D\}.$$

Für eine Diskretisierung mittels (bi-)linearer Finiten Elemente auf einem endlich dimensionalen Teilraum V_h betrachte

$$K_h := \{v_h \in V_h \mid v_h \geq \psi_h \text{ auf } \Omega_{\geq}, v_h = g_h \text{ auf } \Gamma_D\},$$

und die diskrete Ungleichung

$$(\nabla u_h, \nabla(u_h - v_h)) \geq (f_h, v_h - u_h).$$

Definiere $\psi_I := (\dots, \psi(x_i), \dots)^T \in V_h$. Dann gilt:

2 Multigridmethoden

(1) Es existiert genau eine Lösung (da die Gleichung elliptisch sowie das Gebiet abgeschlossen und konvex ist);

(2) Diese Lösung ist charakterisiert durch:

(i)

$$Av \leq f;$$

(ii)

$$v \geq \psi;$$

(iii)

$$(Av - f)^T(v - \psi_I) = 0.$$

(iii) besagt, dass immer (komponentenweise) eine Ungleichung scharf ist.

Projektives Gauß–Seidel–Verfahren (PSSOR)

Für $i = 1, \dots, \dim(A)$ und $i = \dim(A), \dots, 1$ setze

$$v_i \leftarrow \max(\psi_i, v_i + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_j a_{ij}v_j)).$$

Bemerkung: Das PSSOR konvergiert, wenn auch langsam. Das MGM bringt nicht zwingend Effizienz.

Fakt: $m_\ell = (2 + \varepsilon)m_{\ell-1}$ Glättungsschritte auf Level ℓ genügen.

Algorithmus: *cMGM*

1. Approximiere v_0 auf Level 0 „gut“ über S_h .

2. Für $\ell = 1, \dots, L$ prolongiere $v_{\ell-1} \rightarrow v_\ell$ $m_\ell = 3^{L-\ell}m_L$ Schritte von S_h aus.

Bemerkung: Es weist einiges auf größere Robustheit eines cg–Verfahrens als Glätter hin. Am Anfang der Iteration auf Level $\ell \geq 1$ ist der Fehler etwa $u_{2h} - u_h$. Der diskrete Fehler ist etwa $u_h \approx \frac{1}{2}(u_{2h} - u_h)$. Daraus folgt, dass auf dem feinsten Level die Reduzierung des Residuums um den Faktor 10 einer Lösung mit einem Fehler von $\frac{1}{5}$ des Diskretisierungsfehlers entspricht. Dies lässt sich nach wenigen Iterationen erreichen (Multigrideffizienz). Experimentell stellt sich heraus, dass sich die Startresiduen von Level zu Level halbieren. Daraus folgt die a–priori–Schranke

$$\text{Residuum} \leq \frac{1}{10} 0.4^{L-\ell} \text{ Start-Residuum}$$

für Terminisierung auf Level ℓ .

Ein cg–Verfahren (CG–PSSOR)

Sei u_0 Anfangswert. Setze

$$u_1 \leftarrow S(u^0) \quad (\text{PSSOR})$$

Für $\nu = 1, 2, \dots$ berechne

$$\tilde{u}^{\nu+1} \leftarrow S(u^\nu)$$

$$d^{\nu+1} \leftarrow u^\nu - u^{\nu-1}$$

$$g^\nu \leftarrow \tilde{u}^{\nu+1} - u^\nu$$

für $i = 1, \dots, \dim(A)$

$$d_i^{\nu-1} \leftarrow g_i^\nu \leftarrow 0, \text{ falls } \max\{|d_i^{\nu-1}|, |g_i^\nu|\} \geq \tilde{u}_i^{\nu+1} - u_i$$

bestimme d^ν als Minimum der quadratischen Funktion auf $\tilde{u}^{\nu+1} + \text{span}\{d^{\nu-1}, g^\nu\}$

$$u^{\nu+1} \leftarrow \tilde{u}^{\nu+1} + d^\nu$$

wenn $(u^{\nu+1} \not\geq \psi_i)$

bestimme größtes α mit $\tilde{u}^{\nu+1} + \alpha d^\nu \geq \psi_i$

$$u^{\nu+1} \leftarrow \tilde{u}^{\nu+1} + \alpha d^\nu$$

Bemerkung: Es ist $\tilde{u}^{\nu+1} + \alpha_1 d^{\nu-1} + \alpha_2 g^\nu \geq \psi$, falls $|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq \frac{1}{2}$.

2.5 Analyse von Multigridmethoden über Unterraumzerlegungen

Bisherige Konvergenzaussagen mittels der Glättungseigenschaft

$$\|S^\nu v_h\|_X \leq Ch^{-\beta} \frac{1}{\nu^\gamma} \|v_h\|_Y,$$

wobei S der Glätter und $v_h \in V_h$ sind, und der Approximationseigenschaft

$$\|v_h - w_{2h}\|_Y \leq Ch^\beta \|v_h\|_X$$

benötigte $H^{1+\alpha}(\Omega)$ -Regularität für ein $\alpha > 0$. Nun führen wir eine Analyse über *Unterraumzerlegungen* von $V_h = V_\ell$ [Bramble, Pasciak, Xu '91] durch. Als Rahmen dafür sei die Zerlegung von Ω wie zuvor so, dass die Ansatzräume abgeschlossen und geschachtelt seien:

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_L \subset V = H_{(0)}^1(\Omega).$$

Daher lässt sich jedes $v \in V_L$ in

$$v = \sum_{k=0}^L v_k, \quad v_k \in V_k \tag{2.5.1}$$

zerlegen, so dass die Teilsumme $\sum_{k=0}^\ell v_k$ die *Finite Elemente-Lösung* zu v in V_ℓ ist (d.h. mit Ritz-Projektoren $P_k : V \rightarrow V_k$ definiert durch $a(P_k u, w_k) = \langle f, w_k \rangle$ für alle $w_k \in V_k$ ist $v_0 = P_0 v$, $v_k := P_k v - P_{k-1} v$). Mit Lemma 2.2.17 folgt

$$\|v_k\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch_k \|v_k\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, L. \tag{2.5.2}$$

Andererseits gilt eine inverse Ungleichung

$$\|v_k\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch_k^{-1} \|v_k\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, L. \tag{2.5.3}$$

Damit folgt aufgrund der $a(\cdot, \cdot)$ -Orthogonalität der v_k 's

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^L \|v_k\|_{H^1(\Omega)}^2 \sim \|v_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^L h_k^{-2} \|v_k\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{2.5.4}$$

Interpretation: Die Lösung eines Variationsproblems, dessen Energie-Bilinearform äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}^2$ ist, kann durch sukzessive Lösung in Unterräumen ermittelt werden. Die Glättungsprozeduren in den Unterräumen sind dort effiziente Löser, da wegen (2.5.2) und (2.5.3) $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ und $h_k^{-1} \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ äquivalent sind.

2 Multigridmethoden

Dies liefert die Interpretation von Multigridverfahren als Unterraumkorrekturverfahren und nicht die Interpretation von Mehrgitterverfahren als Störung einer Zweigittermethode. Die Normäquivalenzen in (2.5.4) für obigen Spezialfall ohne Regularitätannahmen an die Lösung der Variationsaufgabe stammen von [Xu, '92], [Wang, '94], [Yserentant, '93]. Normäquivalenzen für Besovräume stammen von [Dahmen, Kunoth, '92], [Oswald, '92]. Die Verwendung von Multigridtheorie gilt *nur* für die Energienorm $\|\cdot\| := (a(\cdot, \cdot))^{1/2}$. Die Theorie berücksichtigt *nicht* die Erhöhung der Anzahl der Glättungsschritte in der Vorglättung. Zum besseren Verständnis der Theorie wird zunächst ein iteratives Verfahren behandelt, das abwechselnd auf zwei Unterräume projiziert.

Das Schwarz'sche Alternierende Projektionsverfahren (H.A. Schwarz, 1869)

Aufgabe: Löse das Variationsproblem

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \quad (\text{V})$$

wobei V Hilbertraum und $\|\cdot\| = a(\cdot, \cdot)^{1/2}$ inneres Produkt in V sei. Sei V die *direkte* Summe zweier Unterräume

$$V = Z \oplus W.$$

Die Bestimmung einer Lösung von (V) in den beiden Unterräumen Z und W sei als leicht angenommen.

Alternierendes Projektionsverfahren von Schwarz: Sei $u_0 \in V$.

1. Ist u_{2i} bereits bekannt, finde $v_{2i} \in Z$ durch Lösung von

$$a(u_{2i} + v_{2i}, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in Z.$$

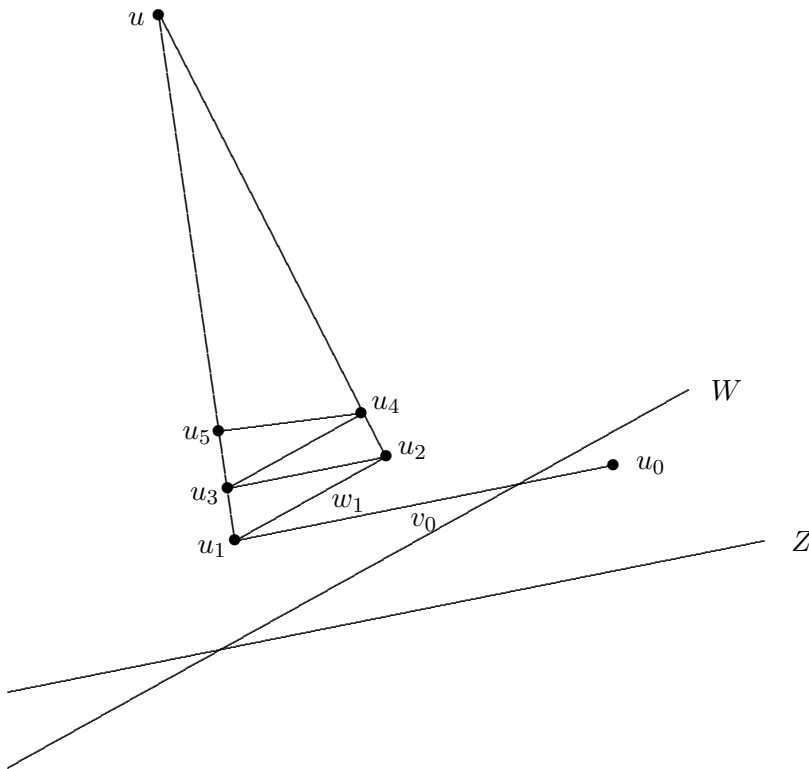
2. Setze $u_{2i+1} = u_{2i} + v_{2i}$.
3. Finde $w_{2i+1} \in W$ durch Lösung von

$$a(u_{2i+1} + w_{2i+1}, w) = \langle f, w \rangle \quad \text{für alle } w \in W.$$

4. Setze $u_{2i+2} = u_{2i+1} + w_{2i+1}$.

Abbruchkriterium.

Geometrische Interpretation:



Ist der Winkel γ zwischen W und Z kleiner als 1 (bzgl. $a(\cdot, \cdot)$), so konvergiert das Verfahren gegen u . Ist der Winkel gleich 1, so ist man nach zwei Schritten fertig.

Für den Konvergenzbeweis ist eine *verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung (strengthened Cauchy-Schwarz inequality)* der folgenden Form entscheidend: Es gebe eine Konstante $\gamma < 1$, so dass für $a(\cdot, \cdot)$

$$|a(\cdot, \cdot)| \leq \gamma \|v\| \|w\| \quad \text{für alle } v \in Z, w \in W \quad (2.5.5)$$

gilt.

Konvergenzsatz (Schwarz'sches Projektionsverfahren:) Gilt für Z, W gemäß $V = Z \oplus W$ eine verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.5.5), so gilt für die Iterierten des Schwarz'schen Projektionsverfahrens

$$\|u_{k+1} - u\| \leq \gamma \|u_k - u\| \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (2.5.6)$$

Beweis: Da das Problem symmetrisch ist, sei k o.B.d.A. gerade. Nach Konstruktion ist

$$a(u_k, w) = \langle f, w \rangle = a(u, w) \quad \text{für alle } w \in W,$$

was äquivalent zur Galerkin-Orthogonalität

$$a(u_k - u, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W$$

ist. Zerlege $u_k - u = \hat{v} + \hat{w}$ mit $\hat{v} \in Z, \hat{w} \in W$. Mit $w = \hat{w}$ folgt aus der Galerkin-Orthogonalität

$$a(\hat{v} + \hat{w}, \hat{w}) = 0 \iff a(\hat{v}, \hat{w}) = -a(\hat{w}, \hat{w}) = -\|\hat{w}\|^2.$$

Aufgrund der verschärften Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.5.5) gilt weiter

$$a(\hat{v}, \hat{w}) = -\alpha_k \|\hat{v}\| \|\hat{w}\|$$

2 Multigridmethoden

für ein $\alpha_k \leq \gamma$. O.B.d.A. sei $\alpha_k \neq 0$. Damit gilt $\|\hat{v}\| = \alpha_k \|\hat{w}\|$ und

$$\|u_k - u\|^2 = \|\hat{v} + \hat{u}\|^2 = \|\hat{v}\|^2 + 2a(\hat{v}, \hat{w}) + \|\hat{w}\|^2 = (\alpha_k^{-2} - 1)\|\hat{w}\|^2.$$

Nach Konstruktion hat u_{k+1} minimalen Abstand zu u bzgl. $\|\cdot\|$, d.h.

$$\|u_{k+1} - u\|^2 \leq \|(u_k + v_k) - u\|^2 \quad \text{für beliebige } v_k \in Z.$$

Wähle speziell $v_k = (\alpha_k^{-2} - 1)\hat{v} \in Z$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u\|^2 &\leq \|u_k - u + v_k\|^2 = \|\hat{v} + \hat{w} + (\alpha_k^2 - 1)\hat{v}\|^2 = \|\hat{w} + \alpha_k^2 \hat{v}\|^2 \\ &= \|\hat{w}\|^2 + \alpha_k^2 \alpha_k^2 \|\hat{v}\|^2 + 2\alpha_k^2 a(\hat{w}, \hat{v}) \\ &= \|\hat{w}\|^2 + \alpha_k^2 \|\hat{w}\|^2 - 2\alpha_k^2 \|\hat{w}\|^2 \\ &= (1 - \alpha_k^2) \|\hat{w}\|^2 \\ &= \alpha_k^2 (\alpha_k^{-2} - 1) \|\hat{w}\|^2 \\ &= \alpha_k^2 \|u_k - u\|^2. \end{aligned}$$

Mit $\alpha_k \leq \gamma$ folgt die Behauptung. ■

Beachte: Die Abschätzung in (2.5.6) ist scharf.

Algebraische Beschreibung eines Algorithmus über Unterraumzerlegungen

Sei $u \in V_L$ Lösung auf dem feinsten Level. Betrachte die rekursive Konstruktion der Finite-Elemente-Ansatzräume mittels

$$V_0, \quad V_\ell = V_{\ell-1} \oplus W_{\ell-1}, \quad \ell = 1, \dots, L = \ell_{\max}. \quad (2.5.7)$$

Daraus folgt

$$V_L = V_0 \oplus \bigoplus_{\ell=0}^{L-1} W_\ell.$$

Die Galerkin-Lösung auf Level ℓ gehört zum Operator $A_\ell : V_\ell \rightarrow V_\ell$, der durch

$$(A_\ell z, w) = a(z, w) \quad \text{für alle } z, w \in V_\ell \quad (2.5.8)$$

definiert ist. Entsprechende Ritz-Projektoren $P_\ell : V \rightarrow V_\ell$ sind durch

$$a(P_\ell u, w) = a(u, w) \quad \text{für alle } w \in V_\ell \quad (2.5.9)$$

definiert. Wir benötigen noch L_2 -orthogonale Projektoren $Q_\ell : V \rightarrow V_\ell$

$$(Q_\ell u, w) := (u, w) \quad \text{für alle } w \in V_\ell. \quad (2.5.10)$$

Daraus folgt

$$A_\ell P_\ell = Q_\ell A_L, \quad \text{für } 0 \leq \ell \leq L. \quad (2.5.11)$$

Denn ist $w \in V_\ell$, so gilt

$$\begin{aligned} (A_\ell P_\ell u, w) &= a(P_\ell u, w) = a(u, w) \\ &= a(u, Q_\ell w) = (A_L u, Q_\ell w) = (Q_\ell A_L u, w). \end{aligned}$$

Da $A_\ell P_\ell$ und $Q_\ell A_L$ in V_ℓ abbilden, gilt also (2.5.11).

Diskussion des Multigridverfahrens

Sei $\tilde{u}_L \in V_L$ approximative Lösung von (V) in V_L und $f_L - A_L \tilde{u}_L$ das zugehörige Residuum. Dann ist die Lösung von (V) im Unterraum $\tilde{u}_L + V_\ell$, ($0 \leq \ell \leq L$) gegeben durch

$$\tilde{u}_L + A_\ell^{-1} \underbrace{Q_\ell(f_L - A_L \tilde{u}_L)}_{\text{Residuum}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Problem wird restringiert in } V_\ell} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Problem wird in } V_\ell \text{ gelöst}}$$

Die Unterraumkorrekturen werden theoretisch durch exakte Lösung in V_ℓ errechnet. Dies ist aber zu aufwendig. Die tatsächliche Lösung erfolgt mittels approximierter Inverser B_ℓ^{-1} . Damit ist die berechnete Unterraumkorrektur gegeben durch

$$B_\ell^{-1} Q_\ell(f_L - A_L \tilde{u}_L),$$

wobei $B_\ell \approx A_\ell$, aber B_ℓ^{-1} schneller und einfacher zu berechnen und B_ℓ symmetrisch (da A_ℓ symmetrisch) ist. Weiter setzen wir der Einfachheit halber die positive Semidefinitheit

$$((B_\ell - A_\ell)v, v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in V_\ell$$

von $B_\ell - A_\ell$ voraus (häufig wird auch die schwächere Annahme

$$((\omega B_\ell - A_\ell)v, v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in V_\ell$$

mit einem $\omega \in (0, 2)$ gemacht). Definiere die lineare Abbildung

$$T_\ell := B_\ell^{-1} Q_\ell A_L = B_\ell^{-1} A_\ell P_\ell.$$

Dann liefert die berechnete Korrektur von \tilde{u}_L in V_ℓ die neue Iterierte

$$\tilde{u}_L + B_\ell^{-1} Q_\ell(f_L - A_L \tilde{u}_L) = \tilde{u}_L + B_\ell^{-1} Q_\ell A_L(u_L - \tilde{u}_L) = \tilde{u} + T_\ell(u_L - \tilde{u}_L)$$

und der Fehler der Iterierten zur exakten Lösung u_L ist

$$(I - T_\ell)(u_L - \tilde{u}_L).$$

Damit ist der Fehlerfortpflanzungsoperator für einen kompletten V-Zyklus gegeben durch

$$E_\ell := (I - T_\ell)(I - T_{\ell-1}) \cdots (I - T_0) \quad \text{für } \ell = 0, \dots, L \quad (2.5.12)$$

mit $E_{-1} := I$. Diese Darstellung ist *multiplikativ*, d.h. es liegt ein *multiplikatives Verfahren* vor (im Unterschied zu einem *additiven Verfahren*).

Annahmen für die Analysis

Für V_ℓ, W_ℓ definiert wie in (2.5.7) gelte

- Es existiere eine Konstante $K_1 > 0$ so, dass

$$\sum_{\ell=0}^L (B_\ell w_\ell, w_\ell) \leq K_1 \left\| \sum_{\ell=0}^L w_\ell \right\|^2 \quad \text{für alle } w_\ell \in W_\ell \quad (A1)$$

gilt.

- Es gebe Konstanten $\gamma_{k\ell} = \gamma_{\ell k} < 1$ so dass

$$a(v_k, w_\ell) \leq \gamma_{k\ell} (B_k v_k, v_k)^{1/2} (B_\ell w_\ell, w_\ell)^{1/2} \quad \text{für alle } v_k \in V_k, w_\ell \in W_\ell, \quad (A2.1)$$

falls $k \leq \ell$. Weiterhin gebe es eine Konstante mit

$$\sum_{k,\ell=0}^L \gamma_{k\ell} x_k y_\ell \leq K_2 \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^{L+1}. \quad (A2.2)$$

Direkte Konsequenzen

Aus (A2) folgt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\ell=0}^L w_\ell \right\|^2 &= \sum_{k,\ell=0}^L a(w_k, w_\ell) \leq \sum_{k,\ell=0}^L \gamma_{k\ell} (B_k w_k, w_k)^{1/2} (B_\ell w_\ell, w_\ell)^{1/2} \\ &\leq K_2 \sum_{\ell=0}^L (B_\ell w_\ell, w_\ell). \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Dies bedeutet, dass die Normen in (A1) und (2.5.13) äquivalent sind, falls (A1) und (A2) gelten.

Lemma 2.5.14. Seien $w_\ell \in W_\ell$ und $v_\ell \in V_\ell$ für $\ell = 0, \dots, L$. Dann gilt

$$\sum_{\ell=0}^L a(w_\ell, v_\ell) \leq \sqrt{K_1} \left\| \sum_{\ell=0}^L w_\ell \right\| \left(\sum_{\ell=0}^L a(T_\ell v_\ell, v_\ell) \right)^{1/2}.$$

Beweis: to do ■

Lemma 2.5.15. Sei $\ell \geq 1$. Dann gilt

$$\|v\|^2 - \|(I - T_\ell)v\|^2 \geq a(T_\ell v, v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Satz 2.5.16 (Konvergenzsatz). Aus (A1) und (A2) folgt

$$\|E_L\|^2 \leq 1 - \frac{1}{K_1(1 + K_2)^2} < 1.$$

Beweis: Sei $v \in V$ beliebig. Dann gilt mit der Definition von E_ℓ und Lemma 2.5.15

$$\|E_{\ell-1}v\|^2 - \|E_\ell v\|^2 = \|E_{\ell-1}v\|^2 - \|(I - T_\ell)E_{\ell-1}v\|^2 \geq a(T_\ell(E_{\ell-1}v), E_{\ell-1}v).$$

Daraus folgt

$$\|v\|^2 - \|E_L v\|^2 = \sum_{\ell=0}^L \left(\|E_{\ell-1}v\|^2 - \|E_\ell v\|^2 \right) \geq \sum_{\ell=0}^L a(T_\ell E_{\ell-1}v, E_{\ell-1}v). \quad (2.5.17)$$

Wenn wir zeigen, dass

$$\|v\|^2 \leq K_1(1 + K_2)^2 \sum_{\ell=0}^L a(T_\ell E_{\ell-1}v, E_{\ell-1}v), \quad (2.5.18)$$

gilt, so folgt

$$\|v\|^2 \leq K_1(1 + K_2)^2 \left(\|v\|^2 - \|E_L v\|^2 \right).$$

Das bedeutet

$$\|E_L v\|^2 (K_1(1 + K_2)^2) \leq (K_1(1 + K_2)^2 - 1) \|v\|^2,$$

was mit $c := K_1(1 + K_2)^2$

$$\|E_L\|^2 := \sup_{v \in V} \frac{\|E_L v\|^2}{\|v\|^2} \leq \frac{c-1}{c} = 1 - \frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{K_1(1 + K_2)^2}$$

ergibt und die behauptete Abschätzung zeigt. Es bleibt (2.5.18) zu zeigen. Sei dazu $v = \sum_{\ell=0}^L w_\ell$ mit $w_\ell \in W_\ell$ eine stabile Zerlegung von v , d.h. die Norm-Äquivalenz in (2.5.4) gilt. Es ist

$$\|v\|^2 = \sum_{\ell=0}^L a(E_{\ell-1}v, w_\ell) + \sum_{\ell=1}^L a((I - E_{\ell-1})v, w_\ell).$$

Eine Abschätzung des ersten Terms ergibt

$$\sum_{\ell=0}^L a(E_{\ell-1}v, w_\ell) \leq \sqrt{K_1} \|v\| \left(\sum_{\ell=0}^K a(T_\ell E_{\ell-1}v, E_{\ell-1}v) \right)^{1/2}. \quad (2.5.19)$$

Unter Ausnutzung von $E_\ell - E_{\ell-1} = -T_\ell E_{\ell-1}$ erhält man mit Induktion

$$I - E_{\ell-1} = \sum_{k=0}^{\ell-1} T_k E_{k-1}. \quad (2.5.20)$$

Der zweite Term ist abgeschätzt durch

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^L a((I - E_{\ell-1})v, w_\ell) &= \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=0}^{\ell-1} a(T_k E_{k-1}v, w_\ell) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=0}^{\ell-1} \gamma_{k\ell} (B_k T_k E_{k-1}v, T_k E_{k-1}v)^{1/2} (B_\ell w_\ell, w_\ell)^{1/2} \\ &\leq K_2 \left(\sum_{k=0}^L (B_k T_k E_{k-1}v, T_k E_{k-1}v) \right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=0}^L (B_\ell w_\ell, w_\ell) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{K_1} K_2 \|v\| \left(\sum_{k=0}^L a(T_k E_{k-1}v, E_{k-1}v) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zusammenfügen der beiden Abschätzungen und Division durch $\|v\|$ liefern (2.5.18). ■

2.6 BPX-Vorkonditionierung für Isogeometrische Analyse

— siehe Folienausdruck und die Originalliteratur [BHKS] —

3 Kontrollprobleme mit partiellen Differentialgleichungen

3.1 Beschränkte Optimierungsprobleme

3.2 Numerische Lösung parabolischer Differentialgleichungen

3.3 Adaptive Waveletverfahren

— siehe Folienausdruck und die Originalliteratur [DK, GK, KS, MP] —

Literatur

- [AF] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, 2003.
- [Bo] F. Bornemann, *An adaptive multilevel approach to parabolic equations III. 2D error estimation and multilevel preconditioning*, IMPACT Comput. Sci. Engrg. 4, 1–45, 1992.
- [B] D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge, 2nd Printing, April 2001.
- [BG] H.-J. Bungartz, M. Griebel, *Sparse grids*, Acta Numerica 13, 147–269, 2004.
- [BHKS] A. Buffa, H. Harbrecht, A. Kunoth, G. Sangalli, *BPX-preconditioning for isogeometric analysis*, ACMAC Preprint #231, Mai 2013, erscheint in Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.
- [BL] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer, 1976.
- [BS] S. Brenner, R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2002.
- [CDP] J.M. Carnicer, W. Dahmen, J.M. Peña, *Local decomposition of refinable spaces*, Appl. Comp. Harm. Anal. 3, 1996, 127–153.
- [C] A. Cohen, *Numerical Analysis of Wavelet Methods*, Studies in Mathematics and its Applications 32, Elsevier, 2003.
- [Dah] W. Dahmen, *Wavelet and multiscale methods for operator equations*, Acta Numerica 1997, 55–228.
- [DK] W. Dahmen, A. Kunoth, *Adaptive wavelet methods for linear–quadratic elliptic control problems: Convergence rates*, SIAM J. Contr. Optim. 43(5), 1640–1675, 2005.
- [Dau] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41, 909–996, 1988.
- [E] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, 1998.
- [GL] G. Golub, C. van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.
- [GR] C. Grossmann, H.–G. Roos, *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Teubner Verlag, Wiesbaden, 3. Auflage, 2006.
- [GK] M.D. Gunzburger, A. Kunoth, *Space-time adaptive wavelet methods for control problems constrained by parabolic evolution equations*, SIAM J. Contr. Optim. Vol.49, No.3, 2011, 1150–1170.
- [H1] W. Hackbusch, *Multigrid Methods and Applications*, Springer, New York, 1985.
- [H2] W. Hackbusch, *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations*, Springer, 1994.
- [HB] M. Hanke–Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2. Auflage, 2006.
- [JW] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of \mathbb{R}^n* , Harwood Academic Publishers, 1984.
- [K1] A. Kunoth, *Wavelet Methods – Elliptic Boundary Value Problems And Control Problems*, Advances in Numerical Mathematics, Teubner, 2001.

Literatur

- [K2] A. Kunoth, *Wavelet-based multiresolution methods for stationary PDEs and PDE-constrained control problems*, in: *Frontiers in Numerical Analysis*, J. Blowey, A. Craig (eds.), Durham 2004, Springer, 1–63, 2005.
- [KS] A. Kunoth, Chr. Schwab, *Analytic regularity and GPC approximation for control problems constrained by linear parametric elliptic and parabolic PDEs*, ACMAC Preprint #162, University of Crete, März 2013, erscheint in *SIAM J. Contr. Optim.*
- [MP] Chr. Mollet, R. Pabel. *Efficient application of nonlinear stationary operators in adaptive wavelet methods — The isotropic case*, *Numerical Algorithms*, DOI: 10.1007/s11075-012-9645-z, September 2012.
- [O] P. Oswald, *Multilevel Finite Element Approximation*, Teubner, 1994.
- [RR] M. Renardy, R.C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 1993.
- [T] V. Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, 1997.
- [Tr] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces and Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [U] K. Urban, *Wavelet Methods for Elliptic PDEs*, Oxford University Press, 2008.
- [X] J. Xu, *Iterative methods by space decomposition and subspace correction*, *SIAM Review* 34, 581–613, 1992.