Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Christian Mollet

Numerik partieller Differentialgleichungen III
WS 2015/2016

Übungsblatt 6

Ausgabe: 14.12.2015 Abgabe: Montag, 21.12.2015 bis 14:00 Uhr

Aufgabe 17: (8 Punkte)

Für $G \subset \mathbb{R}^d$ und Konstanten $c_1,\ c_2 > 0$ sei die Bilinearform

$$a(v,w) := c_1 \int_G \nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx + c_2 \int_G v(x)w(x)\, dx \tag{1}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass diese Bilinearform (1) symmetrisch, stetig und koerziv ist auf $H^1(G)$, d.h. dass Konstanten $A_{\min},\ A_{\max} > 0$ existieren mit

$$\begin{aligned} a(v,w) &= a(w,v) && \text{für alle } v,w \in H^1(G),\\ a(v,w) &\le A_{\max} \|v\|_{H^1(G)} \|w\|_{H^1(G)} && \text{für alle } v,w \in H^1(G),\\ a(v,v) &\ge A_{\min} \|v\|^2_{H^1(G)} && \text{für alle } v \in H^1(G). \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Operator $A\colon\ H^1(G) \to \dot{H}^{-1}(G)$ existiert mit

$$\langle Av, w\rangle = a(v,w) \qquad \text{für alle } v,w \in H^1(G).$$

Hierbei bezeichnet $\dot{H}^{-1}(G) := (H^1(G))'$ den Dualraum von $H^1(G)$, d.h. die Menge der linearen beschränkten Funktionale $H^1(G) \to \mathbb{R}$ und $\langle f, w\rangle := f(w)$ die assoziierte Dualform auf $\dot{H}^{-1}(G) \times H^1(G)$.

Aufgabe 18: (6 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir sagen, dass $u \in L_2(G)$ eine *schwache Ableitung* $v := D^\alpha u (= \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}) \in L_2(G)$ für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ besitzt, falls für dieses $v \in L_2(G)$

$$\int_G \xi(x) v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G (D^\alpha \xi)(x) u(x)\, dx$$

für alle $\xi \in C_0^\infty(G)$ gilt. Hierbei ist durch

$$\|v\|_{L_2(G)} := \left(\int_G |v(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf $L_2(G)$ gegeben. Wir bezeichnen mit $H^k(G)$ den *Sobolev-Raum*

$$H^k(G) := \{u \in L_2(G) : D^\alpha u \in L_2(G) \text{ für } |\alpha| \le k\}.$$

Zeigen Sie (ohne Maple, Mupad, etc. zu benutzen):

a) Für die Funktion $u_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$u_1(x) := \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \ge 0,\\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

gilt $u_1 \in H^1(-1,1)$, aber $u_1 \notin H^2(-1,1)$.

b) Für die Funktion $u_2\colon\ (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $u_2(x) := \sqrt{x}$ gilt $u_2 \in L_2(0,1)$, aber $u_2 \notin H^1(0,1)$.

Aufgabe 19: (6 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum mit innerem Produkt $(\cdot,\cdot)_H$ und der induzierten Norm $\|x\|_H := \sqrt{(x,x)_H}$, für $x \in H$. Sei $x \in H$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H. Zeigen Sie:

a) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H mit Grenzwert $y \in H$. Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so gilt:

$$\lim_{n,m\to\infty} (x_n, y_m)_H = (x,y)_H$$

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $\lim\limits_{n,m\to\infty} (x_n, x_m)_H$ existiert.