Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Christian Mollet

Numerik partieller Differentialgleichungen III
WS 2015/2016

Übungsblatt 5

Ausgabe: 07.12.2015 Abgabe: Montag, 14.12.2015 bis 14:00 Uhr

Aufgabe 14: (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer beliebigen Tridiagonalmatrix der Form

$$\operatorname{diag}(c,a,b) := \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

durch

$$\lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k = 1,\dots,n,$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$x^k := (x_1^k,\dots,x_n^k)^T, \quad \text{mit } x_j^k = \left(\frac{c}{b}\right)^{j/2}\sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right),\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,n,$$

gegeben sind.

Aufgabe 15: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \operatorname{diag}(-\alpha\theta, 2\alpha\theta + 1, -\alpha\theta) \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$$

aus dem θ-Verfahren für alle $\alpha > 0$ und $0 \le \theta \le 1$ invertierbar ist.

Aufgabe 16: (9 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$.
Zeigen Sie für $f, g \in H$ die folgenden Eigenschaften:

a) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\left|(f,g)_H\right| \le \|f\|_H \|g\|_H$

b) Die Minkowski-Ungleichung: $\|f+g\|_H \le \|f\|_H + \|g\|_H$

c) Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H gegen f bezüglich der $\|\cdot\|_H$-Norm, also $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_H = 0$, so konvergiert die Folge $\left(\|f_n\|_H\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\|f\|_H$ für $n\to\infty$, d.h. $\lim_{n\to\infty}\left|\|f_n\|_H - \|f\|_H\right| = 0$.