



NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN III  
WS 2015/2016

Übungsblatt 4

Ausgabe: 30.11.2015

Abgabe: Montag, 7.12.2015 bis 14:00 Uhr

**Aufgabe 11:** (4 Punkte)

Nach Aufgabe 4 ist der Wert einer europäischen Call-Option für festes  $K, r, \sigma, T \in \mathbb{R}, K, r, \sigma, T > 0$  gegeben als

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad t \in (0, T),$$

mit

$$N(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

und

$$d_1 := \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Hierbei bezeichnet  $K$  den Ausübungspreis der Option,  $r$  den risikolosen Zinssatz,  $\sigma$  die (als konstant angenommene) Volatilität und  $T$  den Fälligkeitstag. Für europäische Optionen gilt die folgende Put-Call-Parität

$$S + P(t, S) - C(t, S) = Ke^{-r(T-t)},$$

wobei  $P(\cdot, \cdot)$  den Wert einer Put-Option bezeichnet.

Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für den Wert eines europäischen Puts.

**Aufgabe 12:** (9 Punkte)

Der Wert eines europäischen Calls  $C(t, S)$  ist gegeben wie in Aufgabe 11. Die sogenannten 'Greeks'  $\Delta(t, S)$ ,  $\Gamma(t, S)$  und  $\Theta(t, S)$  sind definiert als

$$\Delta(t, S) := \frac{\partial C}{\partial S}, \quad \Gamma(t, S) := \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, \quad \Theta(t, S) := \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Zeigen Sie, dass sich in diesem Fall von europäischen Optionen die Greeks ergeben als

$$\Delta(t, S) = N(d_1), \quad \Gamma(t, S) = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \Theta(t, S) = -\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2),$$

mit der Notation aus Aufgabe 11 und  $N'(z) := \frac{dN}{dz}(z)$ .

**Aufgabe 13:** (7 Punkte)

- a) Plotten Sie den Wert einer europäischen Call-Option  $C(t, S)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  und des Aktienkurses  $S$  für  $t = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  und  $S = 1, 2, 3, \dots, 30$  bezüglich der Parameter

$$K = 10, T = 1, \sigma = 0.6, r = 0.025$$

in einem 3D-Plot.

- b) Plotten Sie nun für die gleichen Parameter wie in Teil a) die Greeks  $\Delta(t, S)$ ,  $\Gamma(t, S)$  und  $\Theta(t, S)$  für  $t = 0$ ,  $t = 0.4$  und  $t = 0.8$  in Abhängigkeit des Aktienkurses  $S$ .