PROF. DR. ANGELA KUNOTH
CHRISTIAN MOLLET

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN III
WS 2015/2016

Übungsblatt 3

Ausgabe: 23.11.2015 Abgabe: Montag, 30.11.2015 bis 14:00 Uhr

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Beweisen Sie die kontinuierliche Gronwall-Ungleichung:
Seien u, v stückweise stetig und nichtnegativ auf dem Intervall $[t_0, t_0 + a]$ und $C \geq 0$ eine Konstante. Sei weiter

$$v(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + a].$$

Dann gilt

$$v(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds\right) \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + a].$$

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Hindernisproblem (in der Form eines linearen komplementären Problems):
Suche $V \in C^2(I)$ bezüglich $I := [a, b]$ mit

$$\begin{aligned} -V'' &\geq 0 \\ V &\geq \mathcal{H} \\ V''(V - \mathcal{H}) &= 0 \quad \text{in } (a, b) \\ V(a) = V(b) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\mathcal{H} \in C^0(I)$ mit $\mathcal{H}(a) < 0$, $\mathcal{H}(b) < 0$ gegeben ist.
Es bezeichne

$$\mathcal{K} := \left\{ v \in C^1(a, b) : \; v(a) = v(b) = 0, \; v \geq \mathcal{H} \right\}$$

die Menge der Testfunktionen.
Zeigen Sie:
Sei $V \in C^2(I)$ eine Lösung des linearen komplementären Problems (1). Dann löst V die *Variationsungleichung*:
Suche $V \in \mathcal{K}$ mit

$$\int_a^b V(x)'(v(x) - V(x))'\, dx \; \geq 0 \;\; \forall v \in \mathcal{K}. \tag{2}$$

Aufgabe 10: (8 Punkte)

Betrachten Sie das folgende *Minimierungsproblem*:
Suche $V \in \mathcal{K}$ mit

$$J(V) = \min_{v \in \mathcal{K}} J(v) \tag{3}$$

für das Funktional $J : \mathcal{K} \to [0, \infty)$

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_a^b (v'(x))^2\, dx.$$

Zeigen Sie, dass dieses Minimierungsproblem (3) und das Problem (2) äquivalent sind. Hierbei bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge der Testfunktionen aus Aufgabe 9.