Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Christian Mollet

Numerik partieller Differentialgleichungen III
WS 2015/2016

Übungsblatt 2

Ausgabe: 16.11.2015 Abgabe: Montag, 23.11.2015 bis 14:00 Uhr

Aufgabe 6: (6 Punkte)
Betrachten Sie folgende Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} Wu &:= u_t - u_{xx} = 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), \\ u(t,-a) &= g_1(t), \quad u(t,a) = g_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $x \in (-a,a) \subset \mathbb{R}$ und $0 < t < T$ gilt. T, u_0, g_1, g_2 und $a < \infty$ sind gegeben. Sei außerdem ein äquidistantes Gitter mit Gitterpunkten (t_k, x_i) gegeben, wobei

$$t_k := k\tau, \qquad \tau := \frac{T}{M}, \quad k = 0, \ldots, M,$$

für die Zeitschrittweite τ gilt und

$$x_i := -a + hi, \qquad h := \frac{2a}{N}, \quad i = 0, \ldots, N,$$

für die Ortsschrittweite h. Das Ziel ist die Berechnung der approximierten Lösung von (1) auf den Gitterpunkten (t_k, x_i)

$$U_i^k \approx u(t_k, x_i).$$

Betrachten Sie dazu das folgende Verfahren:

$$-\alpha\theta U_{i+1}^{k+1} + (2\alpha\theta + 1)U_i^{k+1} - \alpha\theta U_{i-1}^{k+1} = \alpha(1-\theta)U_{i-1}^k - (2\alpha(1-\theta) - 1)U_i^k + \alpha(1-\theta)U_{i+1}^k, \tag{2}$$

für $i = 1, \ldots, N-1$ und $k = 0, \ldots, M-1$, wobei $\alpha := \frac{\tau}{h^2}$ und $\theta \in [0,1]$ sind. Die zugehörigen Anfangs- und Randdaten sind

$$\begin{aligned} U_0^k &= g_1(t_k), \quad U_N^k = g_2(t_k), \quad && 1 \le k \le M, \\ U_i^0 &= u_0(x_i), && 0 \le i \le N. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgende Aussage:
Seien $g_1, g_2 \in C^2([0,T])$ und $u_0 \in C^4([-a,a])$. Dann ist das Verfahren (2) für beliebiges $\theta \in [0,1]$ für alle $\alpha > 0$ ($\alpha = \tau h^{-2}$) konsistent von der Ordnung $O(h^2 + \tau)$. Gilt $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicholson-Verfahren) und $u_{ttt} \in C^0([0,T])$, so ist die Ordnung $O(h^2 + \tau^2)$.

Aufgabe 7: (14 Punkte)
Gegeben ist die Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 && \text{in } (0,T) \times (-\pi, \pi), \\ u(0,x) &= \sin(x) && \text{für alle } x \in (-\pi, \pi), \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) &= 0 && \text{für alle } t \in (0,T). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: Die exakte Lösung ist $u(t,x) = e^{-t}\sin(x)$.

(b) Plotten Sie für $T = 3$ und $t = 0, 1, 2, 3$ die exakte Lösung.

(c) Implementieren Sie das θ-Verfahren (2) aus Aufgabe 6 für $\theta \in [0,1]$, um eine Approximation $U_{\tau,h}$ (bzgl. der Zeitschrittweite τ und der Ortsschrittweite h) an die Lösung u zu bestimmen. Plotten Sie für $\theta = 0$ (explizites Verfahren), $N = M = 38$, $T = 1$ und $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ die approximative Lösung im Vergleich zu der exakten Lösung.

(d) Geben Sie für $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolson-Verfahren), $T = 1$, $N = M = 2^j$, $j = 1, 2, \ldots$ folgende Daten in einer Tabelle aus: Gitterfeinheit j, Ortsschrittweite h, Zeitschrittweite τ, absoluter Fehler $E_{abs}(\tau, h) := \left\| U_{\tau,h} - u_{\tau,h} \right\|_{\ell_2}$ an $T = 1$, relativer Fehler $E_{rel}(\tau, h) := E_{abs}(\tau, h) / \left\| u_{\tau,h} \right\|_{\ell_2}$ an $T = 1$, EOC (*experimental order of convergence*) mit

$$\text{EOC} := \log_2 \left(\frac{E_{rel}(\tau, h)}{E_{rel}(\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}h)} \right).$$

Hierbei bezeichnet $u_{\tau,h} := (u(1, -\pi), u(1, -\pi + h), u(1, -\pi + 2h), \ldots, u(1, -\pi + Nh))^T$ die exakte Lösung, ausgewertet in den Gitterpunkten zum Zeitpunkt $t = T = 1$ mit Ortsschrittweite h. Die ℓ_2-norm ist definiert als

$$\|u_{\tau,h}\|_{\ell_2}^2 := \sum_{i=1}^{N+1} (u_{\tau,h})_i^2 = \sum_{i=0}^{N} u(1, -\pi + ih)^2,$$

und analog für $U_{\tau,h}$.
Plotten Sie den relativen Fehler $E_{rel}(\tau, h)$ gegen die Gitterfeinheit j.