Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Christian Mollet

Numerik partieller Differentialgleichungen III
WS 2015/2016

Übungsblatt 1

Ausgabe: 02.11.2015 Abgabe: Montag, 16.11.2015 bis 14:00 Uhr

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Transformieren Sie die Black-Scholes-Gleichung

$$\mathcal{L}V := \frac{\partial V(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t,S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V(t,S)}{\partial S} - rV(t,S) = 0, \qquad t \in (0,T) \tag{1}$$

mit der Endbedingung

$$V(T,S) = (S-K)^+ := \max\{0, S-K\}$$

für einen europäischen Call zunächst in die partielle Differentialgleichung

$$v_{xx}(\tau,x) + (q-1)v_x(\tau,x) - qv(\tau,x) = v_\tau(\tau,x)$$

mit geeignetem Parameter q und Anfangsbedingung

$$v(0,x) = (e^x - 1)^+, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Hierbei bezeichnen $v_x := \frac{\partial v}{\partial x}$, $v_\tau := \frac{\partial v}{\partial \tau}$ und $v_{xx} := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.
Hinweis: Substituieren Sie

$$\begin{aligned} x &:= \ln(\tfrac{S}{K}) \\ \tau &:= \tfrac{1}{2}\sigma^2(T-t) \\ V(t,S) &:= Kv(\tau,x) \end{aligned}$$

für $\sigma, K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ fest.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Transformieren Sie die Gleichung

$$v_{xx}(\tau,x) + (q-1)v_x(\tau,x) - qv(\tau,x) = v_\tau(\tau,x)$$

aus Aufgabe 1 in die sogenannte Wärmeleitungsgleichung

$$u_\tau(\tau,x) = u_{xx}(\tau,x),$$

mit Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \left(e^{\frac{1}{2}(q+1)x} - e^{\frac{1}{2}(q-1)x}\right)^+.$$

Hinweis: Setzen Sie

$$v(\tau,x) = e^{\alpha x + \beta\tau}u(\tau,x)$$

mit geeignet gewählten Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (12 Punkte)
Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(\tau,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4\tau}\right) u_0(y)dy$$

löst die Wärmeleitungsgleichung

$$u_\tau(\tau,x) = u_{xx}(\tau,x)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = u_0(x)$$

aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4: (13 Punkte)

Leiten Sie eine geschlossene Formel für den Wert eines europäischen Calls her, indem Sie eine Lösung der Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t,S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V(t,S)}{\partial S} - rV(t,S) = 0$$

mit der Endbedingung

$$V(T,S) = (S-K)^+$$

bestimmen.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Der Wert einer amerikanischen Put-Option lässt sich wie im Fall europäischer Optionen durch die Black-Scholes Gleichung modellieren. Im Unterschied zu europäischen Optionen ist allerdings der Ausübungszeitpunkt beliebig, was auf ein *freies Randwertproblem* führt. Der Preis einer amerikanischen Put-Option lässt sich als Lösung des folgenden Problems bestimmen:
Finde (V, S_f) mit $V = V(t,S)$, dem Wert der Put-Option, und dem freien Rand $S_f = S_f(t)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= 0 && \text{für } S > S_f(t),\ 0 \le t < T, \\ V &= (K-S)^+ =: \mathcal{H}(S) && \text{für } S \le S_f(t),\ 0 \le t < T, \end{aligned} \tag{2}$$

mit den Randdaten

$$\begin{aligned} V(t,S) &= K, && S \to 0 \quad \text{für alle } t \in [0,T), \\ V(t,S) &= 0, && S \to \infty \quad \text{für alle } t \in [0,T), \end{aligned}$$

und den Enddaten

$$V(T,S) = (K-S)^+ \qquad \text{für } S \ge 0,$$

wobei V, $\frac{\partial V}{\partial S}$ auf der Kurve $S = S_f$ stetig sind und $\mathcal{L}$ den Operator die Black-Scholes-Gleichung (1) aus Aufgabe 1 bezeichnet.
Hierbei ergibt sich der freie Rand $S_f(t)$ als eindeutiger Aktienkurs, zu dem es sich lohnt, die Option direkt auszuführen.
Zeigen Sie, dass sich das freie Randwertproblem (2) in das folgende *komplementäre Problem* transformieren lässt:
Finde (V, S_f) als Lösung von

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(V-\mathcal{H}) &= 0, \\ \mathcal{L}V &\le 0, \\ V-\mathcal{H} &\ge 0, \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} V(t,S) &= \mathcal{H}(S) = 0, && S \to \infty \quad \forall t \in [0,T), \\ V(t,S) &= \mathcal{H}(S) = K, && S \to 0 \quad \forall t \in [0,T), \end{aligned}$$

und der Endbedingung

$$V(T,S) = (K-S)^+, \qquad S \ge 0.$$

In dem komplementären Problem taucht der freie Rand S_f nun nur noch implizit auf. Probleme von solchen Typ nennt man auch *Hindernisprobleme*.
Hinweis: Aufgrund der Arbitragefreiheit kann der Payoff $\mathcal{H}$ zu keinem Zeitpunkt größer sein als der Preis der Option V.