Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke

Ausgabe: 05.12.2019

Übung 9 (Bonus)

Abgabe: 12.12.2019, 12:00 Uhr

In dieser Übung wird die Fouriertransformation betrachtet. Diese stellt eine periodische Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ als eine Linearkombination von Schwingungen (e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$) dar. Die Schwingungen $x \mapsto e^{ikx}$ bilden dabei eine Orthogonalbasis des Raums $L_2([0, 2\pi])$. Im Folgenden soll eine Fouriertransformation aus gegebenen Samples einer Funktion f bestimmt werden.

Sei $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit $f \in C([0, 2\pi])$ und $\{\theta_j = 2\pi j/n : j = 0, \dots, n-1\}$ eine Menge von äquidistanten Stützstellen für $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Gesucht ist ein komplexes trigonometrisches Interpolationspolynom p mit

$$p(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}, \qquad c_k \in \mathbb{C},\ m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

welches den Interpolationsbedingungen $p(\theta_j) = f(\theta_j)$ für $0 \le j < n$ genügt. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten c_k:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} c_{-m} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_n^{-m} & \omega_n^{-(m-1)} & \dots & \omega_n^{m} \\ \omega_n^{-2m} & \omega_n^{-2(m-1)} & \dots & \omega_n^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{-(n-1)m} & \omega_n^{-(n-1)(m-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-m} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\theta_0) \\ \vdots \\ f(\theta_{n-1}) \end{pmatrix}, \qquad \omega_n := e^{2\pi i/n}. \tag{1}$$

Aufgabe 19 ($2 + 4 + 3 = 9$ Punkte)

a) Zeigen Sie, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ aus dem Interpolationsproblem (1) mit der Fouriermatrix $\mathbf{F}_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einer Diagonalmatrix $\mathbf{D}_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ schreiben lässt, sodass $\mathbf{A} = \mathbf{D}_n\mathbf{F}_n$, wobei

$$\mathbf{F}_n := \left(\omega_n^{jk}\right)_{0\le j,k<n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \dots & \omega_n^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{n} & \dots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie insbesondere die Diagonalmatrix $\mathbf{D}_n$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{F}_n\overline{\mathbf{F}_n} = \overline{\mathbf{F}_n}\mathbf{F}_n = n\mathbf{I}_n$, wobei $\mathbf{I}_n$ die $n \times n$ Identitätsmatrix bezeichnet. Folgern Sie daraus, dass das Interpolationsproblem (1) eindeutig lösbar ist.

c) Zeigen Sie, dass sich die Koeffizienten c_k darstellen lassen als

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\theta_j)e^{-ik\theta_j}, \qquad -m \le k \le m.$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Formel und dem Integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$?

Die lineare Abbildung von den Funktionswerten $\{f(\theta_j)\}_{0\le j<n}$ auf die Koeffizienten $\{c_k\}_{-m\le k\le m}$ des trigonometrischen Interpolationspolynoms p besteht, bis auf den Vorfaktor $\mathbf{D}_n$, aus einer Multiplikation von $(f(\theta_0), \dots, f(\theta_{n-1}))^T$ mit der inversen Fouriermatrix $\mathbf{F}_n^{-1}$.

Für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ definieren wir die *diskrete Fouriertransformierte* $\mathrm{DFT}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ von $\mathbf{x}$. Umgekehrt heißt $\mathrm{IDFT}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_n\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ die *inverse diskrete Fouriertransformierte* von $\mathbf{x}$.

Die naive Berechnung von DFT und IDFT mittels Matrix-Vektor-Produkt benötigt $O(n^2)$ Operationen. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ kann die Struktur der Fouriermatrix $\mathbf{F}_n$ ausgenutzt werden, um den Aufwand zu reduzieren.

Aufgabe 20 $(4 + 2 + 4 + 1 = 11$ Punkte)

Sei $\mathbf{y} = \mathrm{DFT}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$.

a) Sei zunächst $n = 2M$ mit $M \in \mathbb{N}$ und teile $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ in die Teilvektoren aus geraden und ungeraden Indizes auf: $\mathbf{x}_1 = (x_0, x_2, \ldots, x_{n-2})^T \in \mathbb{C}^{n/2}$ und $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_3, \ldots, x_{n-1})^T \in \mathbb{C}^{n/2}$. Zeigen Sie, dass für $y_k \coloneqq (\mathrm{DFT}(\mathbf{x}))_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega_n^{-kj}$ gilt:

$$y_k = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{DFT}(\mathbf{x}_1))_k + \omega_n^{-k}(\mathrm{DFT}(\mathbf{x}_2))_k\right], \qquad k = 0, \ldots, m-1 \tag{2a}$$

$$y_{k+m} = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{DFT}(\mathbf{x}_1))_k - \omega_n^{-k}(\mathrm{DFT}(\mathbf{x}_2))_k\right], \qquad k = 0, \ldots, m-1. \tag{2b}$$

b) Zeigen Sie, dass Gleichung (2) sich kompakt schreiben lässt als

$$\mathbf{y} = \mathrm{DFT}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{I}_{n/2} \\ \mathbf{I}_{n/2} & -\mathbf{I}_{n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \\ & \mathbf{S}_{n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{n/2}^{-1} & \\ & \mathbf{F}_{n/2}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{P}_n \mathbf{x}, \tag{3}$$

wobei $\mathbf{P}_n$ eine Permutationsmatrix mit $\mathbf{P}_n\mathbf{x} = (x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_1, x_3, \ldots, x_{n-1})^T$ ist und $\mathbf{S}_n$ eine diagonale Skalierungsmatrix bezeichnet:

$$\mathbf{S}_{n/2} = \mathrm{diag}\left(\left(\omega_n^{-k}\right)_{0 \le k < n/2}\right).$$

c) In Teil a) wurde gezeigt, dass sich die DFT der Länge n aus zwei DFT mit jeweils halber Länge $n/2 = m$ zusammensetzt. Ist n nun eine 2er-Potenz, d.h. $n = 2^M$ mit $M \in \mathbb{N}$, so kann Gleichung (3) rekursiv angewandt werden, um die DFT durchzuführen. Ein derartiger Algorithmus wird *Radix-2 schnelle Fouriertransformation* (kurz *Radix-2 FFT*) genannt.

Zeigen Sie, dass die *Radix-2 FFT* $\alpha(n) = n \log_2(n)$ komplexe Additionen (inkl. Subtraktionen) und $\mu(n) = \frac{n}{2}(3 \log_2(n) - 1)$ komplexe Multiplikationen benötigt.

Hinweis: Die Permutation wird nicht als Operation gezählt, da sie nur Werte im Speicher verschiebt. Genauso werden auch Multiplikationen mit Identitätsmatrizen nicht gezählt. Zählen Sie aber, der Einfachheit halber, die Multiplikation mit 1 als erstes Diagonalelement von $\mathbf{S}_{n/2}$ als komplexe Multiplikation.

d) Folgern Sie daraus, dass die *Radix-2 FFT* höchstens $O(n \log(n))$ reelle Operationen benötigt.