Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke
Numerik partieller Differentialgleichungen I — WiSe 2019 / 2020

Ausgabe: 21.11.2019

Übung 7

Abgabe: 28.11.2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Die Matrix-Vektor-Schreibweise der Verfeinerungsgleichung

$$\phi_{j,k}(x) = \sum_{r\in\Delta_{j+1}} m_{r,k}\phi_{j+1,r}(x) \qquad \text{für alle } k \in \Delta_j$$

lautet

$$\Phi_j = M_{j,0}^T \Phi_{j+1},$$

wobei $M_{j,0} \in \mathbb{R}^{\#\Delta_{j+1}\times\#\Delta_j}$ mit $(M_{j,0})_{rk} := m_{rk}$ und $\Phi_j := (\phi_{j,k})_{k\in\Delta_j}$ den Spaltenvektor der Funktionen $\phi_{j,k}$ auf Level j bezeichnet. Zeigen Sie, dass aus der gleichmäßigen Stabilität

$$\|\mathbf{c}\|_{\ell_2(\Delta_j)} \sim \left\|\mathbf{c}^T\Phi_j\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \qquad \text{für alle } \mathbf{c} = (c_k)_{k\in\Delta_j} \in \ell_2(\Delta_j),$$

unabhängig von j, folgt, dass die Matrixnorm von $M_{j,0}$ bezüglich j gleichmäßig beschränkt ist:

$$\|M_{j,0}\| = O(1).$$

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Sei ϕ die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, welche implizit durch eine allgemeine Verfeinerungsgleichung mit gegebenen Koeffizienten a_k ($k \in \mathbb{Z}$) gegeben ist:

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Seien zusätzlich die Translate von ϕ $L_2(\mathbb{R})$-orthonormal, d. h.

$$(\phi, \phi(\cdot - k))_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x-k)\,\mathrm{d}x = \delta_{0,k} \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Betrachte nun eine weitere Funktion

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\phi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R},$$

welche durch die Funktion ϕ mit den Verfeinerungskoeffizienten

$$b_k := (-1)^k a_{1-k}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

bestimmt ist.

Zeigen Sie, dass die Menge der Translate beider Funktionen

$$\{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$$

eine $L_2(\mathbb{R})$-orthonormale Menge bildet.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Räume

$$S_j \coloneqq \operatorname{span}\{\Phi_j\}, \quad \tilde{S}_j \coloneqq \operatorname{span}\{\tilde{\Phi}_j\}, \qquad j \geq j_0 \in \mathbb{Z},$$

wobei $\Phi_j \coloneqq \{\phi_{j,k} : k \in \Delta_j\}$ und $\tilde{\Phi}_j \coloneqq \{\tilde{\phi}_{j,k} : k \in \Delta_j\}$ mit endlicher Indexmenge Δ_j. Bezeichne mit

$$\sigma_{j,k} \coloneqq \operatorname{supp} \phi_{j,k}, \qquad \tilde{\sigma}_{j,k} \coloneqq \operatorname{supp} \tilde{\phi}_{j,k}$$

die Träger der jeweiligen Funktionen sowie mit

$$\square_{j,k} \coloneqq \sigma_{j,k} \cup \tilde{\sigma}_{j,k}, \quad k \in \Delta_j,\ j \geq j_0,$$

die Vereinigung der Träger mit gleichen Indizes. Seien die Mengen $\{\Phi_j\}_{j \geq j_0}$ und $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j \geq j_0}$ so gewählt, dass für alle $j \geq j_0$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- Lokal endlich:

$$\#\{m \in \Delta_j : \square_{j,k} \cap \square_{j,m} \neq \emptyset\} \lesssim 1 \quad \text{für festes } k \in \Delta_j.$$

- Gleichmäßig beschränkt:

$$\|\phi_{j,k}\|_{L_2(\mathbb{R})} \lesssim 1, \quad \|\tilde{\phi}_{j,k}\|_{L_2(\mathbb{R})} \lesssim 1, \qquad k \in \Delta_j \qquad (\text{unabhängig von } j).$$

- Biorthogonal:

$$(\phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,m})_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_{k,m}, \quad k \in \Delta_j.$$

Zeigen Sie, dass dann $\{\Phi_j\}_{j \geq j_0}$ und $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j \geq j_0}$ *gleichmäßig stabil* sind, d.h., dass

$$\|\mathbf{c}\|_{\ell_2(\Delta_j)} \sim \|\mathbf{c}^T \Phi_j\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad \|\mathbf{c}\|_{\ell_2(\Delta_j)} \sim \|\mathbf{c}^T \tilde{\Phi}_j\|_{L_2(\mathbb{R})} \quad \text{für alle } \mathbf{c} = \{c_k\}_{k \in \Delta_j} \in \ell_2(\Delta_j),$$

mit Konstanten unabhängig von j gilt, wobei $\mathbf{c}^T \Phi_j \coloneqq \sum_{k \in \Delta_j} c_k \phi_{j,k}$ und analog für $\mathbf{c}^T \tilde{\Phi}_j$.