Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke
**Numerik partieller Differentialgleichungen I — WiSe 2019 / 2020**

Ausgabe: 14.11.2019

# Übung 6

Abgabe: 21.11.2019, 12:00 Uhr

**Aufgabe 12** (15 Punkte)

Sei $\phi$ die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, welche implizit durch eine allgemeine Verfeinerungsgleichung mit gegebenen Koeffizienten $a_k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

gegeben ist. Die *Maskenkoeffizienten* $\mathbf{a} = \{a_k : k \in \mathbb{Z}\}$ seien so normiert, dass

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{2k} = 1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{2k+1} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k = 2$$

bzw.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x-k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

gilt. Die Verfeinerungsgleichung (1) lässt sich mit $\ell := 2x - k$ für $x \in \mathbb{Z}$ zu

$$\phi(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} a_{2x-\ell}\phi(\ell)$$

umschreiben. Wir nehmen nun an, dass $\operatorname{supp}\mathbf{a} = [0,m]$, $m \in \mathbb{N}$, gilt, woraus $\operatorname{supp}\phi = [0,m]$ und somit $\phi(0) = 0 = \phi(m)$ folgt. Wählt man $x \in \mathbb{Z}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_{2-r}\ \phi(r) \\
\phi(2) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_{4-r}\ \phi(r) \\
&\vdots \\
\phi(m-1) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_{2(m-1)-r}\ \phi(r),
\end{aligned}$$

was äquivalent zu einem Eigenwertproblem

$$\mathbf{\Phi} = A\mathbf{\Phi}$$

mit Eigenwert 1 ist, bzw. zu der Gleichung

$$(A-I)\mathbf{\Phi} = 0,$$

wobei $\mathbf{\Phi} := (\phi(1), \ldots, \phi(m-1))^T$, $A$ die Maskenkoeffizienten enthält und $I$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Dieser Eigenvektor $\mathbf{\Phi}$ ist durch die Normierung (2) eindeutig bestimmt, d.h. $\phi$ ist auf ganz $\mathbb{Z}$ bekannt. Wählt man nun $x \in \mathbb{Z}/2$, also $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ und wendet die Verfeinerungsgleichung (1) an, erhält man analog $\phi$ auf $\mathbb{Z}/2$. Durch mehrfache Wiederholung dieser Vorgehensweise lässt sich $\phi$ an beliebigen dyadischen Stellen $2^{-j}k$, $j \geq 0$ und $k \in \mathbb{Z}$, bestimmen. Implementieren Sie dieses Verfahren in Matlab und berechnen Sie hiermit

a) die B-Splines $N_m$ der Ordnung $m = 2, 3, 4$ aus Aufgabe 5 von Übung 2 und

b) die *Daubechies-Skalierungsfunktion* $D_4$ mit $\operatorname{supp} = [0, 7]$

auf einem uniformen Gitter der Gitterweite $2^{-4}$. Visualisieren Sie die durch die Werte an den Gitterpunkten gegebene Approximation. Hierbei sollen die Funktionswerte zwischen den Gitterpunkten linear interpoliert werden.

**Bemerkung:** Die Maskenkoeffizienten $\mathbf{a}$ für $D_4$ liegen in der Datei `Daubeschies4.mat` auf der Homepage der Vorlesung bereit. Die Datei kann von Matlab mittels `load('Daubeschies4.mat')` gelesen werden.

**Aufgabe 13** (5 Punkte)

Sei $\phi$ die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, welche implizit durch eine allgemeine *Verfeinerungsgleichung* mit gegebenen Koeffizienten $a_k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Weiter definieren wir die Funktionen

$$\phi_{j,k}(x) \coloneqq 2^{j/2}\phi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

durch Dilatation und Translation dieser Funktion $\phi$.

a) Seien zusätzlich die Translate von $\phi$ $L_2(\mathbb{R})$-orthonormal, d.h.

$$(\phi, \phi(\cdot - k))_{L_2(\mathbb{R})} \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x-k)\,\mathrm{d}x = \delta_{0,k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die Koeffizienten die folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m a_{2k+m} = 2\delta_{k,0} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Skalierung in (3) gerade so gewählt ist, dass

$$\|\phi_{j,k}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

gilt, d.h. die Norm unahängig von $j$ ist.

c) Zeigen Sie die folgende Relation: $\phi_{j,k}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2}} a_{m-2k}\phi_{j+1,m}(x)$.

d) Wählen Sie nun speziell $\phi \coloneqq N_2$ (Hutfunktion) wie in Aufgabe 5 aus Übung 2. Skizzieren Sie für diese Wahl die in (3) definierte Funktion $\phi_{j,k}$ für allgemeines $j,k \in \mathbb{Z}$.