Universität zu Köln

Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke
Numerik partieller Differentialgleichungen I — WiSe 2019 / 2020

Ausgabe: 24.10.2019

Übung 3

Abgabe: 31.10.2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Seien eine Folge von Stützstellen $\Delta := \{\tau_i\}_{i=0,\ldots,\ell+1}$ mit $a = \tau_0 < \tau_2 < \ldots \tau_{\ell+1} = b$ und Stützwerte $\{f_i\}_{i=0,\ldots,\ell+1}$ gegeben. Sei s die zughörige interpolierende *lineare* Splinefunktion, das heißt,

$$s \in S_{2,\Delta} \qquad \text{mit } s(\tau_i) = f_i \quad \text{für } i = 0, \ldots, \ell + 1.$$

Bezeichne mit $\mathcal{C}^1_\Delta([a, b])$ die Menge der stetigen Funktionen, die stückweise stetig differenzierbar sind, das heißt,

$$\mathcal{C}^1_\Delta([a, b]) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0([a, b]) : f|_{[\tau_i,\tau_{i+1})} \in \mathcal{C}^1([a, b]) \quad \text{für } i = 0, \ldots, \ell \right\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^1_\Delta([a, b])$ mit $f(x_i) = f_i$ für $i = 0, \ldots \ell + 1$ gilt

$$\|f' - s'\|^2_{L_2([a,b])} = \|f'\|^2_{L_2([a,b])} - \|s'\|^2_{L_2([a,b])},$$

wobei f' die (stückweise) Ableitung bezeichnet.

b) Für eine beliebige lineare Splinefunktion ψ bezüglich Δ und f, s wie in a) gilt die Abschätzung

$$\|f' - s'\|_{L_2([a,b])} \le \|f' - \psi'\|_{L_2([a,b])}.$$

c) Die interpolierende lineare Splinefunktion s löst das Variationsproblem

$$\min_{f \in \mathcal{C}^1_\Delta([a,b])} \|f'\|_{L_2([a,b])} \quad \text{unter den Nebenbedingungen } f(\tau_i) = f_i \quad \text{für } i = 0, \ldots, \ell + 1.$$

Aufgabe 8 (14 Punkte)

Betrachten Sie die allgemeine erweiterte Knotenfolge aus $T := \{\theta\}_{i=1,\ldots,n+k}$ mit $\theta_i < \theta_{i+k}$ für $i = 1, \ldots, n$, also

$$\theta_1 = \ldots = \theta_k = a < \theta_{k+1} \le \ldots \le \theta_n < b = \theta_{n+1} = \ldots = \theta_{n+k},$$

wobei $[a, b]$ ein Intervall ist. Definiere dazu den Raum der B–Splines auf T durch

$$\mathcal{N}_k(T) = \mathcal{N}_{k,T} := \operatorname{span}\{N_{i,k} : i = 1, \ldots, n\},$$

das heißt, jedes Element $S \in \mathcal{N}_k(T)$ besitzt die Darstellung

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i N_{i,k}(x)$$

für $x \in [a, b]$. Durch Einsetzen der Rekursionsformel für B–Splines bekommt man daraus

$$S(x) = \sum_{i=r+1}^{n} c_i^{[r]}(x) N_{i,k-r}(x),$$

wobei die Koeffizienten definiert sind durch

$$c_i^{[r]} = \begin{cases} c_i & \text{falls } r = 0, \\ \frac{x-\theta_i}{\theta_{i+k-r}-\theta_i} c_i^{[r-1]}(x) + \frac{\theta_{i+k-r}-x}{\theta_{i+k-r}-\theta_i} c_{i-1}^{[r-1]}(x) & \text{falls } r > 0, \\ 0 & \text{falls } \theta_{i+k-r} = \theta_i. \end{cases}$$

Speziell für den Fall $r = k - 1$ folgt

$$N_{i,k-r}(x) = N_{i,1}(x) = \mathbb{1}_{[\theta_i,\theta_{i+1})}(x)$$

und damit

$$S(x) = c_i^{[k-1]}(x)$$

für $x \in [\theta_i, \theta_{i+1})$. Zur rekursiven Berechnung der $c_i^{[r]}(x)$ bietet sich ein Neville–artiges Schema an:

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_{i-k+1} & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
c_{i-k+2} & \rightarrow & c_{i-k+2}^{[1]}(x) & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
c_{i-k+3} & \rightarrow & c_{i-k+3}^{[1]}(x) & \rightarrow & c_{i-k+3}^{[2]}(x) & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & \cdots & \searrow & \\
c_i & \rightarrow & c_i^{[1]}(x) & \rightarrow & c_i^{[2]}(x) & & \cdots & \rightarrow & c_i^{[k-1]}(x)
\end{array}$$

a) Implementieren Sie das obige Neville-Schema zur Funktionsauswertung von B–Splines. Halten Sie das Schema so allgemein, dass für beliebige Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{c} := (c_1, \ldots, c_n)^T$ und einer im allgemeinen nicht-äquidistanten erweiterten Knotenfolge $T := \{\theta_i\}_{i=1,\ldots,n+k}$ die Spline-Funktion

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, N_{i,k}(x)$$

an jeder beliebigen Stelle $x \in [a, b) = [\theta_k, \theta_{n+1})$ und für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ ausgewertet werden kann.

b) Wählen Sie die erweiterte Knotenfolge

$$\theta_1 = \ldots = \theta_k = 0 < \theta_{k+1} = 1 < \ldots < \theta_{2k-1} = k - 1 < k = \theta_{2k} = \ldots = \theta_{3k-1}, \tag{1}$$

und berechnen Sie mit dem Algorithmus aus a) die Funktionswerte des Splines $S(x) := N_{k,k}(x)$ an den Punkten $x_\ell := \ell \, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, k2^j - 1$ und $j = 5$ jeweils für $k = 1, \ldots, 4$.

c) Betrachten Sie erneut die erweiterte Knotenfolge (1). Hier fällt insbesondere auf, dass die ersten k Knoten zusammenfallen. Plotten Sie die B–Splines $N_{i,4}$ für $i = 1, 2, 3, 4$ bezüglich der erweiterten Knotenfolge (1), indem Sie wie in Teil b) das Neville-Schema verwenden, um die Funktionswerte der Splines an den Punkten $x_\ell := \ell \, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, 4 \cdot 2^j - 1$ und $j = 5$ zu bestimmen.

d) Wählen Sie nun die nicht-äquidistante erweiterte Knotenfolge

$\theta_1 = \theta_2$	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	$\theta_7 = \theta_8$
0	1	2	2.1	3	4

Plotten Sie alle zu dieser erweiterten Knotenfolge definierten B–Splines $N_{i,2}$ in *einer Grafik*, indem Sie wie in Teil b) das Neville-Schema verwenden, um die Funktionswerte der Splines an den Punkten $x_\ell := \ell \, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, 4 \cdot 2^j - 1$ und $j = 5$ zu bestimmen.

e) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) := \sin(2\pi x), \qquad x \in [0, 1],$$

und die Menge der Stützstellen

$$\tau_\ell := \frac{\ell - 1}{20}, \qquad \ell = 1, \ldots, 21$$

sowie die abgeleitete erweiterte Knotenfolge

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 < \theta_3 \leq \ldots \leq \theta_{21} < 1 = \theta_{22} = \theta_{23}, \quad \theta_\ell := \frac{\ell - 2}{20} \text{ für } \ell = 3, \ldots, 21. \tag{2}$$

Bestimmen Sie (mit „Beweis“) den interpolierenden *linearen* Spline $S(x)$ mit

$$S(\tau_\ell) = f(\tau_\ell), \qquad \ell = 1, \ldots, 21,$$

indem Sie die Entwicklungskoeffizienten c_i der Darstellung

$$S(x) = \sum_{i=1}^{21} c_i \, N_{i,k}(x)$$

bezüglich der obigen erweiterte Knotenfolge (2) angeben und plotten Sie den resultierenden interpolierenden Spline mit Hilfe des Neville-Schemas bezüglich der Stützstellen $x_\ell \coloneqq \ell \, 2^{-j}$ für $\ell = 0, \ldots, 2^j - 1$ und $j = 6$.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu, dass die linearen B–Splines *nodal* bezüglich der gegebenen Stützstellen sind, d.h.

$$N_{i,k}(\tau_\ell) = \delta_{i,\ell}, \qquad \text{für alle } i, \ell = 1, \ldots, 21.$$