Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke
Numerik partieller Differentialgleichungen I — WiSe 2019 / 2020

Ausgabe: 17.10.2019

Übung 2

Abgabe: 24.10.2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Die Faltung zweier reellwertiger Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe der Faltung lassen sich die kardinalen B-Splines der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ rekursiv definieren als

$$N_1 := \mathbb{1}_{[0,1)}, \qquad N_m := N_{m-1} * N_1, \tag{1}$$

wobei $\mathbb{1}_{[0,1)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1)$ bezeichnet:

$$\mathbb{1}_{[0,1)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die B-Splines der Ordnung $m = 2, 3$ mit Hilfe der Definition (1) explizit als stückweise Polynome der Ordnung m an. Plotten oder zeichnen Sie die B-Splines der Ordnung $m = 2, 3, \mathbf{4}$.

b) Beweisen Sie für beliebige reellwertige Funktionen $f, g, h \in L_2(\mathbb{R})$ die folgenden Eigenschaften der Faltung:

   i) Kommutativität: $f * g = g * f$.

   ii) Distributivität: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

   iii) Shift: $f(\cdot - a) * g(\cdot - b) = f * g(\cdot - a - b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

   iv) Skalierbarkeit: $f(\alpha\cdot) * g(\alpha\cdot) = \frac{1}{|\alpha|}(f * g)(\alpha\cdot)$ für $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

c) Beweisen Sie die Symmetrie der B-Splines:

$$N_m(m - x) = N_m(x) \qquad x \in \mathbb{R}, 2 \leq m \in \mathbb{N}.$$

d) Beweisen Sie die Verfeinerungsgleichung für B-Splines:

$$N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N_m(2x - k), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Ein Beweis kann induktiv über die Ordnung m geführt werden. Nutzen Sie dazu die Definition (1), die Eigenschaften der Faltung aus Teil b) sowie die Darstellung der charakteristischen Funktion durch zwei skalierte und verschobene charakteristische Funktionen

$$\mathbb{1}_{[0,1)}(x) = \mathbb{1}_{[0,1)}(2x) + \mathbb{1}_{[0,1)}(2x - 1).$$

e) Geben Sie den Träger $\operatorname{supp}(N_m)$ der B-Splines für allgemeine Ordnung $m \in \mathbb{N}$ an (mit Begründung).

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Betrachten Sie für das glatt berandete Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ das folgende elliptische Variationsproblem zweiter Ordnung:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega): \quad a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Dabei ist die Bilinearform a koerziv, stetig und symmetrisch und die Linearform L beschränkt. Sei $V_J \subset H_0^1(\Omega)$ ein endlich-dimensionaler Teilraum für ein Level $J \in \mathbb{N}$ mit Dimension $\dim(V_J) = N_J = h_J^{-d}$, wobei $h_J = 2^{-J}$ die Gitterweite bezeichnet. Sei $K_J : V_J \to \mathbb{R}^{N_J}$ ein Isomorphismus, der einem Element $v \in V_J$ seine Koordinaten $K_J v = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_J}$ bezüglich einer Basis von V_J zuordnet. Die zur Bilinearform a auf $V_J \times V_J$ gehörende Matrix $\mathbf{A}_J : \mathbb{R}^{N_J} \to \mathbb{R}^{N_J}$ hat die Eigenschaften

- $\mathbf{v}^T \mathbf{A}_J \mathbf{w} = a(K_J^{-1}\mathbf{v}, K_J^{-1}\mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N_J}$ bzw. $a(v,w) = (K_J v)^T A_J (K_J w)$ für alle $v, w \in V_J$,
- $\kappa_2(\mathbf{A}_J) \sim h_J^{-2}$,
- $\mathbf{A}_J$ ist dünnbesetzt („sparse"), d.h. eine Anwendung von $\mathbf{A}_J$ auf einen Vektor benötigt $O(N_J)$ arithmetische Operationen.

Da $\mathbf{A}_J$ symmetrisch positiv-definit ist, ist $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{A}_J}^2 := \mathbf{v}^T \mathbf{A}_J \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_J}$, eine diskrete Norm auf Level J.

Gegeben sei ein iteratives Lösungsverfahren, welches zu gegebenem Anfangsvektor $\mathbf{u}_J^{(0)}$ eine Folge $(\mathbf{u}_J^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ generiert, die gegen die Lösung $\mathbf{u}_J$ des diskretisierten Systems

$$\mathbf{A}_J \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_J \tag{3}$$

konvergiert, wobei $\mathbf{f}_J^T \mathbf{v} = L(K_J^{-1}\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_J}$ gilt. Gehen Sie davon aus, dass das iterative Verfahren in jeder Iteration den Anfangsfehler $\|\mathbf{u}_J - \mathbf{u}_J^{(0)}\|_{\mathbf{A}_J}$ um einen festen Faktor $\rho \in (0,1)$ reduziert. Das heißt, es gibt $\gamma > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left\|\mathbf{u}_J - \mathbf{u}_J^{(k)}\right\|_{\mathbf{A}_J} \leq \gamma \rho^k \left\|\mathbf{u}_J - \mathbf{u}_J^{(0)}\right\|_{\mathbf{A}_J} \qquad \text{mit} \qquad \rho = \frac{\kappa_2(\mathbf{A}_J) - 1}{\kappa_2(\mathbf{A}_J) + 1}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich der Gesamtfehler aus dem Diskretisierungsfehler und dem algebraischen Fehler zusammensetzt: Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\left\|u - K_J^{-1}\mathbf{u}_J^{(k)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left[\|u - u_J\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\mathbf{u}_J - \mathbf{u}_J^{(k)}\right\|_{\mathbf{A}_J}\right], \tag{4}$$

wobei $u \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung des Variationsproblems (2) ist, $u_J \in V_J$ die exakte diskrete Lösung von (3) mit $\mathbf{u}_J = K_J u_J$ bezeichnet und $\mathbf{u}_J^{(k)}$ der Koordinatenvektor nach k Iterationen des Verfahrens zur Lösung von (3) ist.

b) Zeigen Sie, dass $\rho \approx 1 - 2/\kappa_2(\mathbf{A}_J)$ für sehr große $\kappa_2(\mathbf{A}_J)$ und dass $J = \log(N_J)/(d\log(2))$.

c) Zeigen Sie, dass der iterative Löser für einen beliebigen Startvektor $\mathbf{u}_J^{(0)} \in \mathbb{R}^{N_J}$ asymptotisch $(J \to \infty)$ mindestens $O\left(N_J^{1+2/d}\log(N_J)\right)$ arithmetische Operationen benötigt, um nach n_J Iterationen Diskretisierungsfehlergenauigkeit $\left\|\mathbf{u}_J - \mathbf{u}_J^{(n_J)}\right\|_{\mathbf{A}_J} \leq 2^{-J}$ zu erreichen.

Bemerkung: Abschätzung (4) zeigt, dass es unnötig ist, die linearen Systeme (3) bis auf Maschinengenauigkeit zu lösen, da in diesem Fall der Diskretisierungsfehler den Gesamtfehler dominiert. Im Idealfall haben Diskretisierungsfehler und algebraischer Fehler die gleiche Größenordnung.