Ausgabe: 10.10.2019

Übung 1

Abgabe: 17.10.2019, 12:00 Uhr

Notation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

- Für $p \in [1, \infty)$ ist die $L_p(\Omega)$-Norm definiert durch $\|f\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{(1/p)}$.
- Die $L_\infty(\Omega)$-Norm ist definiert durch $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$.
- Für $p \in [1, \infty]$ ist der Lebesgueraum $L_p(\Omega)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\|g\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, welche sich nur auf einer Lebesgue-Nullmenge voneinander unterscheiden.
- Die Funktion $g \in L_1(\Omega)$ ist eine schwache Ableitung von $f \in L_1(\Omega)$ bzgl. x_i, wenn

  $$\int_\Omega f \partial_{x_i} v \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega g v \, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

  Wir schreiben $\partial_{x_i} f := g$. Hier bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Die Funktion f ist schwach differenzierbar bezüglich $L_p(\Omega)$, wenn $\partial_{x_i} f \in L_p(\Omega)$ für alle $1 \le i \le d$.
- Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist die Menge aller $f \in L_2(\Omega)$, für die alle schwachen Ableitungen $\partial_{x_i} f$ existieren und $\partial_{x_i} f \in L_2(\Omega)$ erfüllen. Er ist mit der Norm $\|f\|^2_{H^1(\Omega)} := \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} f\|^2_{L_2(\Omega)}$ versehen.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Wahl.

a) Für ein beschränktes Gebiet Ω ist jede Funktion $f \in L_2(\Omega)$ beschränkt.

b) Jede Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ erfüllt $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

c) Sei $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$. Dann kann $f(0)$ nicht ausgewertet werden.

d) Für $1 \le p < q$ gilt $L^q(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

e) Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gilt: $C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$ bzgl. $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, d. h. zu jedem $u \in H^1(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $v \in C^\infty(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \le \varepsilon$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie für $\sigma \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} |x|^\sigma & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Für welche Werte von $\sigma \in \mathbb{R}$ gilt $f \in L_p((-1, 1))$ mit $p \in [1, \infty]$?

b) Für welche $\sigma \in \mathbb{R}$ ist f schwach differenzierbar bezüglich $L_2((-1, 1))$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $H^1(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ im Allgemeinen unstetige Funktionen enthalten kann. Betrachten Sie dazu die in Polarkoordinaten (r, φ) gegebene Funktion

$$f(r, \varphi) = \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)^\alpha \qquad \text{mit} \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

auf $\Omega = B_{1/2}(0) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < \frac{1}{2}\right\}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein Gebiet mit glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Betrachten Sie für $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in L_2(\Gamma)$ das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f \qquad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g \qquad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $c \in L^\infty(\Omega)$ die Bedingung $c(x) \geq c_0 > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$.

a) Leiten Sie die variationelle Formulierung dieses Problems her (d. h. geben Sie Bilinearform und Linearform sowie die zugehörigen Räume an).

b) Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) für hinreichend glatte $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ die Greensche Formel

$$-\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (\Delta f) g \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n} g \, \mathrm{d}\Gamma$$

und für $f \in H^1(\Omega)$ die Spurungleichung

$$\| f|_\Gamma \|_{L_2(\Gamma)} \leq C \| f \|_{H^1(\Omega)}$$

mit $C > 0$.