# Abschlussprojekt: Space-Time B-Splines

In diesem Projekt soll für $d \in \{1,2\}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{in } (0,T] \times \Omega \coloneqq (0,T] \times (0,1)^d \\ u &= 0 && \text{auf } (0,T] \times \Gamma \coloneqq (0,T] \times \partial\Omega \\ u &= u_0 && \text{auf } \{0\} \times \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit einer Raum-Zeit-Methode basierend auf Tensorprodukt B-Splines gelöst werden. Die Lösung $u(t,x)$ hängt dabei von der Zeitkoordinate $t$ und der Ortskoordinate $x$ ab.

Zunächst wird eine schwache Formulierung von (1) gesucht. Hierzu wird die Gleichung mit einer glatten Testfunktion $v$ multipliziert und über $(0,T) \times \Omega$ integriert. Partielle Integration der beiden Summanden führt zu

$$\begin{aligned} \int_{(0,T)} \int_\Omega f(t,x) v(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t &= \int_{(0,T)} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) v(t,x) - \Delta u(t,x) v(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{(0,T)} \int_\Omega -u(t,x) \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \nabla_x u(t,x) \cdot \nabla_x v(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_\Omega u(T,x) v(T,x) - u_0(x) v(0,x) \,\mathrm{d}x - \int_{(0,T)} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(t,x) v(t,x) \,\mathrm{d}\Gamma(x) \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet, wenn wir die homogene Dirichlet-Randbedingung auch für die Testfunktion fordern, also $v = 0$ auf $(0,T] \times \Gamma$. Da der Endzustand $u(T, \cdot)$ unbekannt ist, fordern wir, dass $v(T, \cdot) = 0$. Dies führt auf die *natürliche* schwache Raum-Zeit Formulierung:

$$\text{Finde } u \in \mathcal{X}: \quad b(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{Y}, \tag{2}$$

wobei $\mathcal{X} \coloneqq L_2((0,T); H_0^1(\Omega))$ und $\mathcal{Y} \coloneqq \{v \in L_2((0,T); H_0^1(\Omega)) \cap H^1((0,T); H_0^1(\Omega)') : v(T) = 0\}$. Die Bilinearform $b$ und die Linearform $L$ sind gegeben durch

$$b(u,v) = \int_{(0,T)} \int_\Omega -u(t,x) \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \nabla_x u(t,x) \cdot \nabla_x v(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

$$L(v) = \int_{(0,T)} \int_\Omega f(t,x) v(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_\Omega u_0(x) v(0,x) \,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Der *Bochner-Raum* $L_2((0,T); H_0^1(\Omega))$ enthält hilbertraumwertige Funktionen. Das heißt, jedes $v \in L_2((0,T); H_0^1(\Omega))$ ist eine Funktion $v\colon (0,T) \to H_0^1(\Omega)$, die als Funktion $(v(t))(x) = v(t,x)$ aufgefasst werden kann. Dabei ist $v$ quadrat-integrierbar, also $\int_{(0,T)} \|v(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t < \infty$. Da $L_2$ und $H_0^1$ Hilberträume sind, ist die Norm von $L_2((0,T); H_0^1(\Omega))$ durch das Skalarprodukt $(u,v)_{L_2((0,T);H_0^1(\Omega))} \coloneqq \int_{(0,T)} (u(t), v(t))_{H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t$ induziert.

In der schwachen Formulierung (2) unterscheidet sich der Lösungsraum $\mathcal{X}$ vom Testraum $\mathcal{Y}$. Verfahren dieser Art werden *Petrov-Galerkin*-Verfahren genannt. Es fällt auf, dass $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, sodass bei einer praktischen Realisierung ein unterbestimmtes Gleichungssystem entstehen könnte. Deswegen, und um ein stabiles Verfahren zu erhalten, wird der Testraum feiner als der Lösungsraum diskretisiert.

Seien $S_J \subset \mathcal{X}$ und $Q_\ell \subset \mathcal{Y}$ endlichdimensionale Räume zu den Leveln $J, \ell \in \mathbb{N}$. Die diskrete Lösung $u_J \in S_J$ ist charakterisiert durch

$$u_J = \operatorname*{arg\,min}_{v \in S_J} \sup_{0 \neq q \in Q_\ell} \frac{|b(v,q) - L(q)|}{\|q\|_{\mathcal{Y}}}. \tag{5}$$

Auf den diskreten Räumen können, nach Wahl einer Basis, die Bilinearform $b$ durch eine Matrix $\mathbf{B}$ mit $b(v,q) = \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{v}$ und die Linearform $L$ durch einen Vektor $\mathbf{f}$ mit $L(q) = \mathbf{q}^T \mathbf{f}$ dargestellt werden. Die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ kann auf dem diskreten Raum $Q_\ell$ durch eine Gram-Matrix (Riesz-Operator) $\mathbf{R}$ mittels $\|q\|_{\mathcal{Y}} = \sqrt{\mathbf{q}^T\mathbf{R}\mathbf{q}}$ bestimmt werden. Letztere repräsentiert das $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{Y}}$-Skalarprodukt auf $Q_\ell$: $(q,w)_{\mathcal{Y}} = \mathbf{q}^T\mathbf{R}\mathbf{w}$ für alle $q, w \in Q_\ell$.

Mit diesen Definitionen ist (5) äquivalent zu

$$\mathbf{u}_J = \underset{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{\dim(S_J)}}{\arg\min} \|\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{f}\|_{\mathbf{R}^{-1}}, \tag{6}$$

wobei $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{R}} := \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{v})_{\mathbb{R}^{\dim(S_J)}}} := \sqrt{\mathbf{v}^T\mathbf{R}\mathbf{v}}$. Das Minimierungsproblem (6) ist äquivalent zu der modifizierten Normalengleichung

$$\mathbf{B}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_J = \mathbf{B}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{f}. \tag{7}$$

Der Riesz-Operator $\mathbf{R}$ repräsentiert das Skalarprodukt von $\mathcal{Y}$ auf $Q_\ell$:

$$(q,w)_{\mathcal{Y}} = (q,w)_{L_2((0,T);H_0^1(\Omega))} + (q,w)_{H^1((0,T);H_0^1(\Omega)')} = \mathbf{q}^T\mathbf{R}\mathbf{w}. \tag{8}$$

Für den Riesz-Operator $\mathbf{R}_{H_0^1(\Omega)'}$ von $H_0^1(\Omega)'$ gilt

$$\mathbf{R}_{H_0^1(\Omega)'} = \mathbf{R}_{L_2(\Omega)}\mathbf{R}^{-1}_{H_0^1(\Omega)}\mathbf{R}_{L_2(\Omega)}, \qquad \mathbf{q}^T\mathbf{R}_{H_0^1(\Omega)}\mathbf{w} = (q,w)_{H_0^1(\Omega)}, \qquad \mathbf{q}^T\mathbf{R}_{L_2(\Omega)}\mathbf{w} = (q,w)_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Sei im Folgenden die Endzeit $T = 1$ festgesetzt, sodass $(0,T)\times\Omega = (0,1)^{d+1}$. Als diskrete Teilräume $S_J$ und $Q_\ell$ werden Tensorprodukt B-Splines auf uniformen Gittern mit Gitterweite $2^{-J}$ bzw. $2^{-\ell}$ verwendet. Sei $\mathcal{S}_{j,k} := \operatorname{span}\{N_{i,k} : i = 1,\dots,2^j + k - 1\}$ der Raum der B-Splines der Ordnung $k$ auf einem erweiterten Knotenvektor mit Abstand $2^{-j}$ zum Intervall $[0,1]$. Seien weiter $\mathcal{S}_{j,k}^{(00)} := \operatorname{span}\{N_{i,k} : i = 2,\dots,2^j + k - 2\}$ und $\mathcal{S}_{j,k}^{(0)} := \operatorname{span}\{N_{i,k} : i = 1,\dots,2^j + k - 2\}$. Dann ist eine stabile Diskretisierung durch Räume der Form $S_{J,k} = \mathcal{S}_{J,k} \times (\mathcal{S}_{J,k}^{(00)})^d$ und $Q_{J+1,\ell} = \mathcal{S}_{J+1,\ell}^{(0)} \times (\mathcal{S}_{J+1,\ell}^{(00)})^d$ gegeben.

Betrachten Sie das Problem (1) mit Endzeit $T = 1$, den Daten $u_0^{(d)}$, $f^{(d)}$ und exakten Lösungen $u^{(d)}$:

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(t,x) &= \cos(2\pi t)\sin(3\pi x), & u^{(2)}(t,\mathbf{x}) &= \cos(2\pi t)\sin(3\pi x_1)\sin(2\pi x_2),\\
f^{(1)}(t,x) &= \pi\,(9\pi\cos(2\pi t) - 2\sin(2\pi t))\sin(3\pi x), & f^{(2)}(t,\mathbf{x}) &= \pi\,(13\pi\cos(2\pi t) - 2\sin(2\pi t))\sin(3\pi x_1)\sin(2\pi x_2),\\
u_0^{(1)}(x) &= \sin(3\pi x), & u_0^{(2)}(\mathbf{x}) &= \sin(3\pi x_1)\sin(2\pi x_2).
\end{aligned}$$

Verwenden Sie für alle Nummerierungen die lexikographische Sortierung. Nutzen Sie so oft es geht die Tensorprodukt-Struktur aus.

## Aufgaben

a) Zeigen Sie die Äquivalenz von (5), (6) und (7).

b) Schreiben Sie eine Funktion `A = MatAssembly1D(knots, order, diff, startI, endI)`, welche die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=\texttt{startI}}^{\texttt{endI}}$ mit

$$a_{ij} = \int_a^b N_{j,k}^{(\texttt{diff}_1)} N_{i,k}^{(\texttt{diff}_2)}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad i,j = \texttt{startI},\dots,\texttt{endI}$$

aufbaut, wobei `diff` ein Vektor der Länge 2 mit den Ableitungsgraden ist. Der erweiterte Knotenvektor wird in `knots` und die B-Spline Ordnung in `order` übergeben. Beachten Sie, dass nur die B-Splines mit $i,j = \texttt{startI},\dots,\texttt{endI}$ in der Matrix berücksichtigt werden.

c) Schreiben Sie eine Funktion `R = RieszOp(knots, order, startI, endI)`, welche den Riesz-Operator $\mathbf{R}$ nach (9) aufbaut. Hier sind `startI` und `endI` Vektoren der Länge $d+1$, die für jede Dimension den Start- und End-Index der B-Spline Basisfunktionen angeben.

d) Schreiben Sie eine Funktion `B = BMat(d, knotsSol, orderSol, knotsTest, orderTest)`, welche die Matrix $\mathbf{B}$ aus (3) aufbaut. Der Lösungsraum $S_J$ ist dabei durch `knotsSol`, `orderSol` und der Testraum $Q_\ell$ durch `knotsTest`, `orderTest` festgelegt. Die Dimension des Raumes wird mit `d` übergeben.

e) Schreiben Sie eine Funktion `f = FVek(d, knotsTest, orderTest)`, welche den Vektor **f** aufbaut. Wählen Sie dabei die korrekten Daten anhand der Dimension `d` und nutzen Sie die Tensorprodukt-Struktur der Daten.

f) Schreiben Sie eine Funktion `u = SolvePG(d, tol, knotsSol, orderSol, knotsTest, orderTest)`, welche die modifizierte Normalengleichung (7) mittels eines CG-Verfahrens löst. Das CG-Verfahren soll abgebrochen werden, wenn das Residuum die Toleranz `tol` erreicht. Verwenden Sie die Matlab-Funktion `pcg()`.

g) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches für $d \in \{1, 2\}$, die Level $J = 2, 3, 4, 5$ und die Ordnungen $k =$ `orderSol` $= 2, 3, 4$ Problem (1) mit den obigen Daten löst. Fixieren Sie $\ell =$ `orderTest` $= 2$ und lösen Sie das diskrete System jeweils bis auf Diskretisierungsfehlergenauigkeit (ggf. zuzüglich eines Toleranzfaktors).

Berechnen Sie für jede Ordnung und jede Dimension den $L_2([0,1]^{d+1})$-Fehler und erstellen Sie damit einen doppelt-logarithmischen Konvergenzplot (Fehler gegen Gitterweite $2^{-J}$), wobei die Kurven der verschiedenen Ordnungen in einen gemeinsamen Plot pro Dimension $d$ abgetragen werden sollen. Berechnen Sie empirische Konvergenzraten und geben Sie für jede Dimension eine Tabelle mit den Raten der einzelnen Ordnungen aus.

**Hinweise:**

- Die obige Aufteilung in einzelne Funktionen kann zur mehrfachen Berechnung der eindimensionalen Matrizen führen. Sie können stattdessen auch eine weniger modulare Variante programmieren, die dafür effizienter funktioniert.
- Das CG-Verfahren benötigt nur Matrix-Vektor Produkte. Dies kann ausgenutzt werden, um die Matrix $\mathbf{R}_{H_0^1(\Omega)}$ in (9) nicht invertieren zu müssen. Es genügt nun, ein Gleichungssystem mit $\mathbf{R}_{H_0^1(\Omega)}$ zu lösen, was deutlich schneller ist als die gesamte Matrix zu invertieren.

  Da $\mathbf{R}_{H_0^1(\Omega)}$ symmetrisch und positiv definit ist, könnte dieses Gleichungssystem ebenfalls näherungsweise mit dem CG-Verfahren gelöst werden.
- Eine Funktion zur Tensorprodukt-Gauß-Quadratur für 3 Dimensionen wird bei Bedarf bereitgestellt.

# Literatur


[Mol16] Christian Mollet. „Parabolic PDEs in Space-Time Formulations: Stability for Petrov-Galerkin Discretizations with B-Splines and Existence of Moments for Problems with Random Coefficients“. Diss. Universität zu Köln, Juli 2016.