Abschlussprojekt: B-Spline Kollokation

Neben dem Galerkin-Verfahren gibt es noch weitere Verfahren zur Lösung von PDEs. In diesem Projekt soll ein B-Spline Kollokationsverfahren zur Lösung der PDE

$$\begin{aligned} Au &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

verwendet werden. Der Operator A bezeichnet dabei einen linearen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung (z. B. $A = -\Delta$) und die Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sind gegeben.

In einem Tensorprodukt B-Spline Kollokationsverfahren wird die numerische Lösung

$$u_J(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}} (\mathbf{u}_J)_{\mathbf{i}}\, N_{\mathbf{i},k}(\mathbf{x}) = \sum_{i_1\in\mathcal{I}}\sum_{i_2\in\mathcal{I}} (\mathbf{u}_J)_{(i_1,i_2)}\, N_{i_1,k}(x_1)N_{i_2,k}(x_2), \qquad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

auf einem Gitter mit Level $J \in \mathbb{N}$ dadurch bestimmt, dass die starke Form der PDE (wie in (1)) auf einer endlichen Menge von *Kollokationspunkten* $\mathcal{K} \subset \bar{\Omega}$ exakt erfüllt ist:

$$\begin{aligned} (Au_J)(\tau) &= f(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{K}_{\text{int}}, \\ u(\tau) &= g(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{K}_{\text{bnd}}, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die Kollokationspunkte $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\text{int}} \cup \mathcal{K}_{\text{bnd}}$ in innere Punkte $\mathcal{K}_{\text{int}} \subset \Omega$ und Randpunkte $\mathcal{K}_{\text{bnd}} \subset \partial\Omega$ aufgeteilt werden.

Als Kollokationspunkte eignen sich zum Beispiel die *Greville-Abszissen*. Für einen (allgemeinen) erweiterten Knotenvektor θ zum Intervall $[0,1]$ gegeben durch

$$\theta_1 = \ldots = \theta_k = 0 < \theta_{k+1} < \theta_{k+2} < \ldots < \theta_n < 1 = \theta_{n+1} = \ldots = \theta_{n+k},$$

der zu einem B-Spline der Ordnung k gehört, sind die Greville-Punkte $(\gamma_i)_{i=1}^n$ definiert als

$$\gamma_i \coloneqq \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k-1} \theta_{i+j}, \qquad i = 1,\ldots,\#\theta - k. \tag{4}$$

Insbesondere gilt $\gamma_1 = 0$ und $\gamma_n = 1$. Die Kollokationspunkte für den Tensorprodukt B-Spline der Ordnung k mit äquidistantem Knotenvektor zum Level J (siehe z. B. Übung 4) ergeben sich durch Tensorieren:

$$\mathcal{K}_J \coloneqq \{(\gamma_i,\gamma_j) : i,j = 1,\ldots,2^J + k - 1\}. \tag{5}$$

Wird der Tensorprodukt Spline in (2) mit $\mathcal{I} \coloneqq \{1,\ldots,2^J+k-1\}$ in die diskrete Form (3) der PDE eingesetzt, erhält man ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{u}_J = \mathbf{b}$ für die Koeffizienten $\mathbf{u}_J$.

In diesem Projekt soll die PDE

$$\begin{aligned} -\Delta u + \mathbf{q}^T\nabla u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

mit $\mathbf{q} = (1,1)^T$ und

$$f(\mathbf{x}) = 4\pi\left[(x_1 - x_2)\cos\left(2\pi(x_1^2 - x_2^2)\right) + 4\pi(x_1^2 + x_2^2)\sin\left(2\pi(x_1^2 - x_2^2)\right)\right], \tag{7}$$

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\sin\left(2\pi x_2^2\right) & \text{für } x_1 \in \{0,1\}, \\ \sin\left(2\pi x_1^2\right) & \text{für } x_2 \in \{0,1\} \end{cases} \tag{8}$$

gelöst werden. Die exakte Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &u(\mathbf{x}) = \sin\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right), && \nabla u(\mathbf{x}) = 4\pi\cos\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \\ &\partial_{x_1,x_1}u(\mathbf{x}) = 4\pi\left[\cos\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right) - 4\pi x_1^2\sin\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)\right], && \partial_{x_1,x_2}u(\mathbf{x}) = 16\pi^2 x_1 x_2\sin\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right), \\ &\partial_{x_2,x_2}u(\mathbf{x}) = -4\pi\left[\cos\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right) + 4\pi x_2^2\sin\left(2\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Aufgaben

a) Was ist bei der Wahl der Ordnung des Splines k im Hinblick auf (1) (mit einem allgemeinen linearen Differentialoperator) zu beachten?

b) Leiten Sie die Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\mathbf{b}$ des linearen Gleichungssystems für das Kollokationsverfahren her. Setzen Sie dazu den Spline in (2) in die diskrete Form (3) der PDE ein.

c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `v = Nik2D(x, y, i, j, knots, order, diff)`, welche die $(\mathtt{diff}_1, \mathtt{diff}_2)$-te Ableitung $(\mathtt{diff}_1, \mathtt{diff}_2 \geq 0)$ der Tensorprodukt B-Spline Basisfunktion

$$N_{\mathtt{i},\mathtt{order}}^{(\mathtt{diff}_1)}(\mathtt{x}) N_{\mathtt{j},\mathtt{order}}^{(\mathtt{diff}_2)}(\mathtt{y}) \tag{10}$$

an den Punkten $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ auswertet. Die Punkte sind durch beliebige Arrays `x`, `y` (mit gleicher Größe) gegeben und der Rückgabewert `v` ist ein Array gleicher Größe.

d) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `v = EvalSpline2D(x, y, knots, order, coeffs, diff)`, welche die $(\mathtt{diff}_1, \mathtt{diff}_2)$-te Ableitung $(\mathtt{diff}_i \geq 0)$ des B-Splines

$$\sum_{i_1, i_2 = 1}^{\#\mathtt{knots} - \mathtt{order}} \mathtt{coeffs}_{(i_1, i_2)} \, N_{i_1,\mathtt{order}}^{(\mathtt{diff}_1)}(x) N_{i_2,\mathtt{order}}^{(\mathtt{diff}_2)}(y) \tag{11}$$

an den Punkten $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ auswertet. Die Punkte sind durch beliebige Arrays `x`, `y` (mit gleicher Größe) gegeben und der Rückgabewert `v` ist ein Array gleicher Größe.

e) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `ptsCol = Greville(knots, order)`, welche zum gegebenen Knotenvektor $\theta = \mathtt{knots}$ die Greville-Punkte $(\gamma_i)_{i=1}^{2^J+k-1}$ nach (4) berechnet und als Vektor `ptsCol` zurückgibt.

f) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `A = CollocationMat(knots, order, ptsCol)`, welche die Kollokationsmatrix $\mathbf{A}$ aufbaut. Die 1D Kollokationspunkte werden dabei in dem Vektor `ptsCol` übergeben und müssen gemäß (5) tensoriert werden.

Hinweis: Verwenden Sie die lexikographische Sortierung für die Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$. Erstellen Sie eine `sparse`-Matrix und nutzen Sie den Träger der B-Spline Basisfunktionen aus.

g) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `b = CollocationVec(knots, order, ptsCol)`, die die rechte Seite $\mathbf{b}$ aufbaut. Die Funktionen f und g aus (6) sind dabei in (8) gegeben.

Hinweis: Verwenden Sie die lexikographische Sortierung für die Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$.

h) Lösen Sie unter Verwendung der oben erstellten Funktionen das Problem (6) für $k = 3, \ldots, 8$ und $J = 2, \ldots, 6$. Berechnen Sie für jede Kombination (J, k) den Fehler der numerischen Lösung $u_{J,k}$ bezüglich der exakten Lösung (9) in den (Semi-)Normen

$$\|v\|_{L_\infty(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|, \tag{12}$$

$$|v|_{W^{1,\infty}(\bar{\Omega})} = \max\{\|\partial_{x_1} v\|_{L_\infty(\bar{\Omega})}, \|\partial_{x_2} v\|_{L_\infty(\bar{\Omega})}\}, \tag{13}$$

$$|v|_{W^{2,\infty}(\bar{\Omega})} = \max\{\|(\partial_{x_1,x_1} v)\|_{L_\infty(\bar{\Omega})}, \|(\partial_{x_1,x_2} v)\|_{L_\infty(\bar{\Omega})}, \|(\partial_{x_2,x_2} v)\|_{L_\infty(\bar{\Omega})}\}. \tag{14}$$

Approximieren Sie diese Normen, indem Sie die Funktion $|v|$ auf einem uniformen Gitter mit Level $J = 8$ auswerten und das Maximum dieser Funktionswerte bestimmen.

Plotten Sie für jede Ordnung k eine Fehlerkurve (Gitterweite 2^{-J} gegen Fehlernorm für $J = 2, \ldots, 6$) in einen gemeinsamen doppelt-logarithmischen (`loglog`) Konvergenzplot. Erstellen Sie einen solchen Konvergenzplot für jede Fehlernorm.

Schätzen Sie für jede Ordnung k und jeweils zwei aufeinanderfolgende Level $J-1$, J die Konvergenzrate

$$\mathrm{eoc}(J, k) = \frac{\ln\left(\frac{\|u_{J,k} - u\|}{\|u_{J-1,k} - u\|}\right)}{\ln\left(\frac{2^{-J}}{2^{-(J-1)}}\right)}$$

bezüglich aller Fehlernormen. Geben Sie eine Tabelle mit den (empirischen) Konvergenzraten $\mathrm{eoc}(J, k)$ für jede Norm aus.

Literatur

[Aur+10] F. Auricchio u. a. „ISOGEOMETRIC COLLOCATION METHODS“. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.11 (Nov. 2010), S. 2075–2107. DOI: 10.1142/S0218202510004878.