Ausgabe: 24.06.2020

Übung 9

Abgabe: 01.07.2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 18 (8 Punkte)

Ein *finites Element* ist nach P.G. Ciarlet ein Tripel (K, L, P), wobei

- $K \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet,
- $L = (\ell_i)_{i=1}^N$ eine endliche Menge von linearen Funktionalen auf $C^\infty(\bar{K})$ und
- P ein endlichdimensionaler Raum von Funktionen $\bar{K} \to \mathbb{R}$ ist, sodass L P-unisolvent ist.

Dabei ist L genau dann P-unisolvent, wenn für jede Wahl der Koeffizienten $(\alpha_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ genau eine Funktion $p \in P$ existiert mit

$$\ell_i(p) = \alpha_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

a) Betrachten Sie für ein Dreieck $K \subset \mathbb{R}^2$ mit positiven Innenwinkeln den Raum $P = P_2(K)$ der Polynome mit Grad höchstens 2. Es sei $\mathrm{mid}(K_i, K_j)$ der Mittelpunkt der Kante K_i–K_j, wobei K_i und K_j Eckpunkte von K bezeichnen. Mit Hilfe des Auswertungsfunktionals

$$\delta_x : C^0(\bar{K}) \to \mathbb{R}, \qquad \delta_x(f) \coloneqq f(x),$$

wobei $x \in \bar{K}$ beliebig ist, sei die Menge der Funktionale L definiert durch

$$L = \left(\delta_{K_1}, \delta_{K_2}, \delta_{K_3}, \delta_{\mathrm{mid}(K_1,K_2)}, \delta_{\mathrm{mid}(K_2,K_3)}, \delta_{\mathrm{mid}(K_3,K_1)}\right).$$

Zeigen Sie, dass (K, L, P) ein finites Element ist.

Hinweis: Betrachten Sie (mit Begründung) das Referenzdreieck und konstruieren Sie eine Lagrange-Basis $(p_j)_j$ von P mit $\ell_i(p_j) = \delta_{i,j}$.

b) Betrachten Sie das Intervall $K = (0, 1)$ und die Funktionale

$$L = (\delta_0, \delta_1, D_0, D_1),$$

wobei $D_x : C^1(\bar{K}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \partial_x f(x)$ die Auswertung der Ableitung am Punkt $x \in \bar{K}$ bezeichnet. Finden Sie einen Funktionenraum P, sodass (K, L, P) ein finites Element ist.

Aufgabe 19 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Petrov-Galerkin Formulierung

$$\text{Finde } u \in \mathcal{X} : \quad b(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{Y},$$

wobei $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Hilberträume sind, $b \colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform bezeichnet und $L \colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Linearform ist. Die Bilinearform b erfülle außerdem eine *inf-sup* Bedingung (siehe Übung 8), sodass das Problem wohlgestellt ist.

Seien $S \subset \mathcal{X}$ und $Q \subset \mathcal{Y}$ endlichdimensionale Räume. Die diskrete Lösung $u \in S$ ist charakterisiert durch

$$u = \operatorname*{arg\,min}_{v \in S} \sup_{0 \neq q \in Q} \frac{|b(v, q) - L(q)|}{\|q\|_{\mathcal{Y}}}. \tag{1}$$

Auf den diskreten Räumen können, nach Wahl einer Basis, die Bilinearform b durch eine Matrix $\mathbf{B}$ mit $b(v, q) = \mathbf{q}^T\mathbf{B}\mathbf{v}$ und die Linearform L durch einen Vektor $\mathbf{f}$ mit $L(q) = \mathbf{q}^T\mathbf{f}$ dargestellt werden. Die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ kann auf dem diskreten Raum Q durch eine (symmetrisch positiv-definite) Gram-Matrix (Riesz-Operator) $\mathbf{R}$ mittels

$\|q\|_{\mathcal{Y}} = \sqrt{\mathbf{q}^T\mathbf{R}\mathbf{q}}$ bestimmt werden. Letztere repräsentiert das $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{Y}}$-Skalarprodukt auf Q: $(q,w)_{\mathcal{Y}} = \mathbf{q}^T\mathbf{R}\mathbf{w}$ für alle $q, w \in Q$.

Mit diesen Definitionen ist (1) äquivalent zu

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{\dim(S)}}{\arg\min} \|\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{f}\|_{\mathbf{R}^{-1}}, \tag{2}$$

wobei $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{R}} := \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{v})_{\mathbb{R}^{\dim(S)}}} := \sqrt{\mathbf{v}^T\mathbf{R}\mathbf{v}}$. Das Minimierungsproblem (2) ist äquivalent zu der modifizierten Normalengleichung

$$\mathbf{B}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{f}. \tag{3}$$

Zeigen Sie die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Hinweise:

- Nutzen Sie (ohne Beweis): $\sup\limits_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{\dim(Q)}} g(\mathbf{q}) = \sup\limits_{\tilde{\mathbf{q}}\in\mathbb{R}^{\dim(Q)}} g(\mathbf{R}^{-1/2}\tilde{\mathbf{q}})$ für beliebige Funktionen $g\colon \mathbb{R}^{\dim(Q)} \to \mathbb{R}$.
- Nutzen Sie (ohne Beweis): $\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1/2} = \mathbf{I}$.

Aufgabe 20 (6 Punkte)

Betrachten Sie für ein Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $f \in L_2(\Omega)$ das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit der schwachen Formulierung

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Das *Residuumsfunktional* $r_v\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ an der Stelle $v \in H_0^1(\Omega)$ ist definiert durch

$$r_v(w) := \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w - f w)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

a) Zeigen Sie: $r_v(u - v) = -\|\nabla(u - v)\|^2_{L_2(\Omega)}$.

b) Zeigen Sie: Für $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $\|\nabla(u-v)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sup\limits_{w\in H_0^1(\Omega)} \Big(-\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)} - 2r_v(w)\Big)$ und das Supremum wird für $w = u - v$ angenommen.

c) Nehmen Sie an, dass eine Approximation $\tilde{r}_v \approx r_v$ von r_v existiert mit

$$|\tilde{r}_v(w)| \le Q(v)\|\nabla w\|_{L_2(\Omega)},$$

wobei $Q\colon H_0^1(\Omega) \to [0,\infty)$ ein numerisch berechenbares Funktional ist. Zeigen Sie:

$$\|\nabla(u-v)\|^2_{L_2(\Omega)} \approx \sup_{w\in H_0^1(\Omega)} \Big(-\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\tilde{r}_v(w)\Big) \le (Q(v))^2.$$

Hinweis: Eine notwendige und (in diesem Fall) hinreichende Bedingung für die Lösung des Optimierungsproblems in Teil b) ist $\delta F(w;\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, wobei $F(w) := -\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)} - 2r_v(w)$. Dabei bezeichnet $\delta F(w;\varphi)$ die Gâteaux-Ableitung des Funktionals F in Richtung φ definiert durch

$$\delta F(w;\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(w+\varepsilon\varphi) - F(w)}{\varepsilon}.$$

Nutzen Sie außerdem (ohne Beweis), dass $\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ für $p, q \in H_0^1(\Omega)$ ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ ist.

Hintergrund: Das Residuumsfunktional ist ein Maß für den Fehler in der H^1-Seminorm (bzw. der H^1-Norm in diesem Fall). Abschätzen des Residuumsfunktionals nach oben mit Hilfe von berechenbaren Termen liefert den Fehlerindikator aus der Vorlesung (Residuum und Sprungterme an den Kanten). Alternativ kann das Funktional r_v durch ein ähnliches (bzgl. der H^{-1}-Norm) Funktional $\tilde{r}_v$ ersetzt werden. Dann ist Q ein geeigneter Fehlerindikator. Solche Funktionale $\tilde{r}_v$ können z. B. mit Mittelwerten (*post-processing*) von ∇u_h konstruiert werden:

$$r_{u_h}(w) = \int_\Omega (\nabla u_h \cdot \nabla w - f w) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \int_\Omega Z(u_h) \cdot \nabla w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} =: \tilde{r}_{u_h}(w)$$

wobei $Z(u_h) := \nabla u_h - G_h(\nabla u_h)$ mit dem Mittelwert-Operator G_h. Dazu wird ausgenutzt, dass $G_h(\nabla u_h)$ den Gradienten ∇u der analytischen Lösung bei geschickter Konstruktion mit einer schnelleren Rate approximiert als ∇u_h (*Superkonvergenz*). Daraus ergibt sich der leicht und effizient berechenbare Fehlerindikator $Q(u_h) = \|Z(u_h)\|$.