Ausgabe: 17.06.2020

Übung 8

Abgabe: 24.06.2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 16 (14 Punkte)

Sei $b\colon V \times W \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform mit

$$0 < B_{\max} := \sup_{0 \neq v \in V} \sup_{0 \neq w \in W} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} < \infty$$

bezüglich zweier Hilberträume V, W mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$ beziehungsweise $(\cdot,\cdot)_W$ und induzierten Normen $\|\cdot\|_V := \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$ sowie $\|\cdot\|_W := \sqrt{(\cdot,\cdot)_W}$.

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger linearer stetiger Operator $B\colon L \to W$ existiert, so dass

$$(Bv, w)_W = b(v,w) \qquad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W$$

mit Operatornorm

$$\|B\|_{L(V,W)} = B_{\max}.$$

Hierbei bezeichnet $L(V,W)$ den Raum der linearen und beschränkten Abbildungen von V nach W und die Operatornorm ist gegeben als

$$\|B\|_{L(V,W)} := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Rieszschen Darstellungssatz.

b) Zeigen Sie, dass der Operator $B \in L(V,W)$ aus a) genau dann ein Isomorphismus ist mit

$$\|B^{-1}\|_{L(W,V)} = B_{\min}^{-1},$$

wenn $b(\cdot,\cdot)$ eine *inf-sup Bedingung* erfüllt, d. h. dass eine Konstante $B_{\min} > 0$ existiert mit

$$0 < B_{\min} := \inf_{0 \neq v \in V} \sup_{0 \neq w \in W} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W}, \tag{1}$$

sowie

$$\forall 0 \neq w \in W \quad \exists v \in V\colon \quad b(v,w) \neq 0. \tag{2}$$

Bemerkung: Das bedeutet, dass das Variationsproblem

$$\text{Finde } u \in V \text{ mit} \quad b(u,w) = f(w) \quad \text{für alle } w \in W$$

für $f \in W'$ eine eindeutige Lösung besitzt, falls die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind, wobei W' den Dualraum von W bezeichnet. Somit ist die obige Aussage eine Verallgemeinerung des Satzes von Lax-Milgram.

Hinweis: Um die Surjektivität zu beweisen, ist es nützlich zunächst zu zeigen, dass der Bildbereich abgeschlossen ist, also dass $B(V)$ abgeschlossen ist. Hiermit lässt sich durch eine sinnvolle Zerlegung von W die Surjektivität folgern, also $B(V) = W$.

c) Zeigen Sie, dass die Bedingungen (1) und (2) äquivalent sind zu

$$\inf_{0 \neq v \in V} \sup_{0 \neq w \in W} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \inf_{0 \neq w \in W} \sup_{0 \neq V \in V} \frac{b(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = B_{\min}.$$

Bemerkung: Das bedeutet insbesondere, dass wir die Räume in (1) und (2) vertauschen dürfen.

Aufgabe 17 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Zerlegung eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie: Eine Funktion $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $H^1(\Omega)$ wenn

- $v|_K \in H^1(K)$ für alle $K \in \mathcal{T}_h$ und
- für jede gemeinsame Kante $E = K_1 \cap K_2 \in \mathcal{E}_h$ zweier Elemente $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ gilt, dass $v|_{K_1} = v|_{K_2}$ auf E im distributionellen Sinn.

b) Folgern Sie daraus, dass $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ eine hinreichende Bedingung für einen konformen diskreten Teilraum $V_h \subset H^1(\Omega)$ ist.

c) Welche Bedingung an V_h ist hinreichend für $V_h \subset H^2(\Omega)$?