Ausgabe: 20.05.2020

Übung 5

Abgabe: 27.05.2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Betrachten Sie die PDE (1.1.1) mit den Eigenschaften (1.1.2) aus der Vorlesung. Sei zusätzlich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon und $\mathcal{T}_h$ eine zulässige reguläre Zerlegung. Leiten Sie die folgende a posteriori Abschätzungen her:

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K,$$
$$\eta_K := h_K^2 \, \|f + \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \nabla u_h) - a_0 u_h\|_{L_2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial K \setminus \partial\Omega} h_E^{3/2} \, \|[\boldsymbol{n}_E \cdot \boldsymbol{A} \nabla u_h]_E\|_{L_2(E)},$$

wobei $C > 0$ eine von $\mathcal{T}_h$ unabhängige Konstante ist.

Hinweise:

- Aubin-Nitsche Trick: Betrachten Sie das adjungierte Problem:

$$\text{Finde } w \in H_0^1(\Omega): \quad a(v, w) = (u - u_h, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

- Nutzen Sie (ohne Beweis) die elliptische Regularität: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon, $\boldsymbol{A} \colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig differentierbar, symmetrisch und gleichmäßig positiv definit und $a_0 \colon \bar{\Omega} \to (0, \infty)$ stetig. Dann gilt für die Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des homogenen Dirichletproblems

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \nabla u) + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

  mit rechter Seite $f \in L_2(\Omega)$: Es gibt ein $C > 0$ mit $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}$, das heißt, $u \in H^2(\Omega)$.

- Verwenden Sie die Galerkin-Orthogonalität für die Interpolierende $w_h := I_h w$.

- Nutzen Sie (ohne Beweis) die folgenden Interpolationsabschätzungen für $u \in H^2(\Omega)$ und $K \in \mathcal{T}_h$ sowie $E \in \partial K$:

$$\|u - I_h u\|_{L_2(K)} \leq C_1 h_K^2 |u|_{H^2(K)},$$
$$\|u - I_h u\|_{L_2(E)} \leq C_2 h_E^{3/2} |u|_{H^2(K)},$$

  wobei $C_1, C_2 > 0$ von K und E unabhängige Konstanten sind.

- Um welche Interpolierende handelt es sich hier und warum ist das möglich?

Aufgabe 12 (6 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit den Eckpunkten P_1, P_2 und P_3, wobei die Länge der längsten Seite $h > 0$ ist. Der lineare Interpolationsoperator I_h interpoliere eine (stetige) Funktion $u \colon \bar{K} \to \mathbb{R}$ auf den Eckpunkten P_i, $i = 1, 2, 3$. Das heißt, es gilt $(I_h u)(P_i) = u(P_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

a) Zeigen Sie: Für eine differentierbare Funktion $u \colon \bar{K} \to \mathbb{R}$ mit Lipschitz-stetiger Ableitung ∇u gilt punktweise in $\bar{K}$

$$\|\nabla(u - I_h u)\|_2 \leq h \left(1 + \frac{2}{\sin(\gamma)}\right) L_u,$$

wobei L_u die Lipschitz-Konstante von ∇u ist und γ der größte Innenwinkel von K.

b) Was bedeutet diese Abschätzung im Hinblick auf die Form der Dreiecke einer Zerlegung?

Hinweise:

- Finden Sie auf zwei der drei Seiten von K eine Nullstelle von $\nabla(u - I_h u)$.
- Verwenden Sie $\|\nabla f\|_2 = \max\limits_{\|\boldsymbol{v}\|_2=1} |(\nabla f)^T \boldsymbol{v}|$.
- Stellen Sie $\boldsymbol{v}$ als Linearkombination der Richtungsvektoren der beiden Seiten von K dar.
- Untersuchen Sie alle Kombinationen für die beiden gewählten Seiten.

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Seien V und M zwei reflexive Banachräume mit den Dualräumen V^* und M^* und

$$a\colon V \times V \to \mathbb{R}, \qquad b\colon V \times M \to \mathbb{R}$$

zwei stetige (nicht notwendigerweise symmetrische) Bilinearformen. Diesen beiden Bilinearformen werden die Operatoren

$$\begin{aligned} A\colon V \to V^*, &\quad v \mapsto a(v,\cdot) \in V^*, \\ B\colon V \to M^*, &\quad v \mapsto b(v,\cdot) \in M^* \end{aligned}$$

zugeordnet. Seien ferner $f \in V^*$ und $g \in M^*$ gegeben. Das abstrakte Sattelpunktsproblem

$$\begin{aligned} \text{Finde } (u,\lambda) \in V \times M\colon \quad a(u,v) + {}& b(v,\lambda) = \langle f, v\rangle_{V^*,V} && \forall v \in V, \\ & b(u,\mu) = \langle g, \mu\rangle_{M^*,M} && \forall \mu \in M \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung $(u,\lambda) \in V \times M$ mit

$$\|u\|_V + \|\lambda\|_M \le C\left(\|f\|_{V^*} + \|g\|_{M^*}\right),$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist, wenn gilt:

- Der Operator A ist stetig invertierbar auf $\ker(B) = \{v \in V : b(v,\mu) = 0 \text{ für alle } \mu \in M\}$ und
- die Bilinearform b erfüllt für ein $\beta > 0$ die Bedingung

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in V} \frac{b(v,\mu)}{\|\mu\|_M \, \|v\|_V} \ge \beta.$$

Betrachten Sie für ein konvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $f \in L_2(\Omega)$ das Poisson-Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

a) Setzen Sie $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ und formulieren Sie dieses Problem zweiter Ordnung als System erster Ordnung. Entfernen Sie dann den auftretenden Divergenz-Operator durch partielle Integration und geben Sie die schwache Formulierung (inklusive Räume) an.

b) Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser schwachen Formulierung.

Hintergründe: In Anwendungen ist häufig der Gradient $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ von u wichtiger als u selbst.

- In der Kontinuumsmechanik ist u die Verschiebung und $\boldsymbol{\sigma}$ die Spannung eines elastischen Körpers. Die Spannung ist ein Maß der Belastung, was zur Auslegung von Bauteilen sehr wichtig ist ($\rightsquigarrow$ Wann bricht das Bauteil bzw. wie stark muss das Bauteil sein?)
- In der Strömungslehre beschreibt u das Druckfeld einer langsamen Strömung durch ein poröses Medium (z. B. Grundwasser im Boden). Der Gradient $\boldsymbol{\sigma}$ ist hier das Geschwindigkeitsfeld der Strömung ($\rightsquigarrow$ Wie verteilen sich Verunreinigungen im Grundwasser?).

Approximiert man u direkt und berechnet daraus $\boldsymbol{\sigma}$, so ist $\boldsymbol{\sigma}$ in der Regel deutlich ungenauer als u. Um dieses Problem zu umgehen, wird $\boldsymbol{\sigma}$ als Unbekannte in die Modellierung aufgenommen. Hierdurch kann die Genauigkeit von $\boldsymbol{\sigma}$ kontrolliert werden und es ist kein Post-Processing von u nötig.