Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke
Numerik partieller Differentialgleichungen II — SoSe 2020

Ausgabe: 06.05.2020

Übung 3

Abgabe: 13.05.2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Es ist häufig nützlich, jedes Dreieck $K \subset \mathbb{R}^2$ einer Zerlegung $\mathcal{T}_h$ auf ein festes (von K unabhängiges) Referenzdreieck $\hat{K}$ zurückzuführen. Hierzu wird eine affine Abbildung $T_K\colon \hat{K} \to K$ der Form $T_K(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{B}_K\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}_K$ verwendet, wobei $\boldsymbol{B}_K$ eine 2×2 Matrix und $\boldsymbol{b}_K \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor ist.

Seien $\hat{\varrho}$ und ϱ der Inkreisradius von K bzw. $\hat{K}$ und h und $\hat{h}$ die Länge der längsten Kante von K bzw. $\hat{K}$. Zeigen Sie für eine beliebige Matrixnorm $\|\cdot\|$ die Abschätzungen

$$\|\boldsymbol{B}_K\| \leq C_1 \frac{h}{\hat{\varrho}} \qquad \text{und} \qquad \left\|\boldsymbol{B}_K^{-1}\right\| \leq C_2 \frac{\hat{h}}{\varrho},$$

wobei $C_1, C_2 > 0$ Konstanten sind, die nicht von $h, \hat{h}, \varrho, \hat{\varrho}$ abhängen.

Folgern Sie für ein festes Referenzdreieck $\hat{K}$ und eine zulässige reguläre Zerlegung $\mathcal{T}_h$, dass es von h_K unabhängige Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit

$$\|\boldsymbol{B}_K\| \leq C_1 h_K \qquad \text{und} \qquad \left\|\boldsymbol{B}_K^{-1}\right\| \leq C_2 h_K^{-1}$$

für alle $K \in \mathcal{T}_h$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein Element einer Zerlegung und $\hat{K}$ ein festes (von K unabhängiges) Referenzelement. Zudem sei K das Bild von $\hat{K}$ unter einer affinen Transformation $T_K\colon \hat{K} \to K$ der Form $T_K(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{B}_K\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}_K$ mit $\det(\boldsymbol{B}_K) \neq 0$. Zeigen Sie für hinreichend glatte und integrierbare Funktionen $\hat{f}\colon \hat{K} \to \mathbb{R}$ und $f\colon K \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{x} = T_K(\hat{\boldsymbol{x}})$ die folgenden Aussagen:

a) $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = |\det(\boldsymbol{B}_K)| \int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}$.

b) $\displaystyle\int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} = \left|\det\left(\boldsymbol{B}_K^{-1}\right)\right| \int_K f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

c) $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_K^{-\mathrm{T}} \nabla \hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$.

d) $\nabla \hat{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{B}_K^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x})$.

e) $|f|_{H^k(K)} \leq c\sqrt{|\det(\boldsymbol{B}_K)|}\,\left\|\boldsymbol{B}_K^{-1}\right\|^k |\hat{f}|_{H^k(\hat{K})}$ für ein $c > 0$, das nur von der Dimension d und $k \in \mathbb{N}_0$ abhängt.

f) $|\hat{f}|_{H^k(\hat{K})} \leq c\sqrt{\left|\det\left(\boldsymbol{B}_K^{-1}\right)\right|}\,\|\boldsymbol{B}_K\|^k |f|_{H^k(K)}$ für ein $c > 0$, das nur von der Dimension d und $k \in \mathbb{N}_0$ abhängt.

Hierbei bezeichnet $|f|_{H^k(K)}$ die $H^k(K)$-Halbnorm der Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ mit $K \subset \mathbb{R}^d$:

$$|f|_{H^k(K)}^2 := \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L_2(K)}^2,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex mit $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$ ist und $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ gesetzt wird.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Zeigen Sie eine Version von Lemma 1.1.15 aus der Vorlesung:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes konvexes Gebiet. Dann gibt es ein $C > 0$, welches von der Dimension d und der Form von Ω aber nicht von $\operatorname{diam}(\Omega)$ abhängt, mit

$$\|v - \bar{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \operatorname{diam}(\Omega) |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

wobei der Mittelwert $\bar{v} \in \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$\bar{v} \coloneqq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Verwenden Sie (ohne Beweis) diesen Spezialfall des *Bramble-Hilbert Lemmas*:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes konvexes Gebiet und $u \in H^1(\Omega)$. Dann gibt es eine offene Kugel $B \subset \Omega$ und eine Konstante $C > 0$, die von der Dimension d und der Form von Ω aber nicht von $\operatorname{diam}(\Omega)$ abhängt, sodass

$$\|u - Q^1 u\|_{L_2(\Omega)} \leq C \operatorname{diam}(\Omega) |u|_{H^1(\Omega)}, \qquad \left(Q^1 u\right)(\boldsymbol{x}) = \int_B u(\boldsymbol{y}) \phi(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

wobei $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine cut-off Funktion mit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\phi) \subset \bar{B}$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$ ist.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Modellproblem (1.1.8) aus der Vorlesung mit exakter Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Sei u_h eine diskrete Lösung mit linearen finiten Elementen. Dann gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = O(h) \qquad (h \to 0).$$

Nehmen Sie an, Sie hätten eine zweite diskrete Familie von Lösungen $\hat{u}_h$ mit

$$\|u - \hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)} = O\big(h^2\big) \qquad (h \to 0).$$

Dies wird zum Beispiel mit quadratischen finiten Elementen erreicht, falls die rechte Seite von (1.1.8) genügend glatt ist.

a) Nehmen Sie an, dass die Sättigungsbedingung $\|u - \hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ für $\beta \in (0,1)$ gilt (ggf. für h hinreichend klein). Zeigen Sie, dass

$$C_1 \|u_h - \hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|u_h - \hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$$

mit $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von h.

b) Wegen Teil a) erfüllt also $\eta \coloneqq \|u_h - \hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$ die Kriterien eines robusten und effizienten Fehlerschätzers. Begründen Sie, ob dies tatsächlich der Fall ist und warum sich η für eine praktische Umsetzung eignet oder nicht.