Ausgabe: 01.07.2020

Übung 10

Abgabe: 08.07.2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Raum

$$\ell_p(\mathbb{N}) \coloneqq \left\{ \boldsymbol{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} < \infty \right\}, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \coloneqq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^p \right)^{1/p}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\ell_p(\mathbb{N})}$ für $p \in (0,1)$ eine Quasi-Norm auf $\ell_p(\mathbb{N})$ ist. Das heißt, $\|\cdot\|_{\ell_p(\mathbb{N})}$ erfüllt die folgenden Axiome:

- Definitheit: $\|\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0$.
- Absolute Homogenität: $\|\alpha\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} = |\alpha|\|\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Verallgemeinerte Dreiecksungleichung: Es gibt $C_p > 1$ mit $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \le C_p \left(\|\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} + \|\boldsymbol{w}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \right)$.

Hinweise: Zeigen Sie $(a+b)^p \le a^p + b^p$ für $a, b \ge 0$ und $p \in (0,1)$. Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung.

Aufgabe 22 (8 Punkte)

Zu $\boldsymbol{v} \in \ell_2(\mathbb{N})$ sei $\pi_{\boldsymbol{v}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\left|v_{\pi_{\boldsymbol{v}}(n)}\right| \ge \left|v_{\pi_{\boldsymbol{v}}(n+1)}\right| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Das heißt, die Folge $(v_{\pi_v(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist betraglich absteigend geordnet. Die absteigende Umordnung $\boldsymbol{v}^\star = (v_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\boldsymbol{v}$ sei definiert durch

$$v_n^\star \coloneqq \left|v_{\pi_{\boldsymbol{v}}(n)}\right| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für $\tau \in (0,2)$ sei die folgende Menge definiert:

$$\ell_\tau^w(\mathbb{N}) \coloneqq \left\{ \boldsymbol{v} \in \ell_2(\mathbb{N}) : |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})} < \infty \right\}, \qquad |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})} \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{1/\tau} v_n^\star, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})} \coloneqq \|\boldsymbol{v}\|_{\ell_2(\mathbb{N})} + |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})}.$$

Die Räume $\ell_\tau^w(\mathbb{N})$ werden *Lorentz-Räume* oder auch *schwache ℓ_p-Räume* (Superskript w für *weak*) genannt.

a) Zeigen Sie für $\varepsilon > 0$:

$$\ell_\tau(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_\tau^w(\mathbb{N}) \subset \ell_{\tau+\varepsilon}(\mathbb{N}).$$

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis), dass $\ell_p(\mathbb{N}) \subset \ell_q(\mathbb{N})$ für $0 < p < q \le \infty$.

b) Zeigen Sie: Für $p > \tau$ gibt es eine Konstante $C(p,\tau) > 0$ mit

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \le C(p,\tau)|\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \ell_\tau^w(\mathbb{N}).$$

Für die Konstante $C(p,\tau)$ gilt $C(p,\tau) \to \infty$ für $p \to \tau$.

c) Für $\boldsymbol{v} \in \ell_2(\mathbb{N})$ sei die Verteilungsfunktion $\mu_{\boldsymbol{v}} \colon [0,\infty) \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\mu_{\boldsymbol{v}}(\eta) \coloneqq \#\{n : |v_n| \ge \eta\}.$$

Zeigen Sie:

$$\sup_{\eta>0} \eta^\tau \mu_{\boldsymbol{v}}(\eta) = |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})}^\tau.$$

Das heißt, für $\boldsymbol{v} \in \ell_2(\mathbb{N})$ gilt $\boldsymbol{v} \in \ell_\tau^w(\mathbb{N})$ genau dann, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit

$$\mu_{\boldsymbol{v}}(\eta) = \#\{n : |v_n| \ge \eta\} \le M\eta^{-\tau} \qquad \forall \eta > 0.$$

Hinweise: Zeigen Sie $\sup_{\eta>0} \eta^\tau \mu_{\boldsymbol{v}}(\eta) \le |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})}^\tau$ und $\sup_{\eta>0} \eta^\tau \mu_{\boldsymbol{v}}(\eta) \ge |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})}^\tau$. Wählen Sie für eine der beiden Ungleichungen zu $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m(v_m^\star)^\tau \ge |\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})}^\tau - \varepsilon$.

Aufgabe 23 (8 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $\mathcal{A}^s$ (siehe (2.4.2) aus der Vorlesung) für $s > 0$:

$$\mathcal{A}^s := \{\boldsymbol{v} \in \ell_2(\mathbb{N}) : |\boldsymbol{v}|_{\mathcal{A}^s} < \infty\}, \qquad |\boldsymbol{v}|_{\mathcal{A}^s} := \sup_{N\in\mathbb{N}} N^s \min_{\#\operatorname{supp}\boldsymbol{w}\le N} \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|_2, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{A}^s} := \|\boldsymbol{v}\|_{\ell_2(\mathbb{N})} + |\boldsymbol{v}|_{\mathcal{A}^s}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^s}$ eine Quasi-Norm ist.

b) Zeigen Sie: Für $\sigma > 1$ gibt es eine Konstante $C_\sigma > 0$ mit

$$\sum_{n>N} n^{-\sigma} \le C_\sigma N^{1-\sigma} \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

c) Zeigen Sie: Für $1/\tau = s + 1/2$ gilt $\boldsymbol{v} \in \mathcal{A}^s \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in \ell_\tau^w(\mathbb{N})$, das heißt $\mathcal{A}^s = \ell_\tau^w(\mathbb{N})$.
Hinweise:

- Nutzen Sie (ohne Beweis): $\displaystyle\min_{\#\operatorname{supp}\boldsymbol{w}\le N} \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|_2 = \left(\sum_{n>N} (v_n^\star)^2\right)^{1/2}.$
- Betrachten Sie für $\boldsymbol{v} \in \mathcal{A}^s \Rightarrow \boldsymbol{v} \in \ell_\tau^w(\mathbb{N})$ die Terme $N(v_{2N}^\star)^2$ und $(N+1)(v_{2N+1}^\star)^2$. Gelangen Sie dadurch zu Abschätzungen der Form $(2N)^{1/\tau} v_{2N}^\star \le C|\boldsymbol{v}|_{\mathcal{A}^s}$ und $(2N+1)^{1/\tau} v_{2N+1}^\star \le C|\boldsymbol{v}|_{\mathcal{A}^s}$ für $N \in \mathbb{N}$ mit einer gemeinsamen Konstanten $C > 0$. Folgern Sie daraus $|\boldsymbol{v}|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})} \lesssim \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{A}^s}$ oder $\|\boldsymbol{v}\|_{\ell_\tau^w(\mathbb{N})} \lesssim \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{A}^s}$.