Prof. Dr. Angela Kunoth
Samuel Leweke
Numerik partieller Differentialgleichungen II — SoSe 2020

Ausgabe: 22.04.2020

Übung 1

Abgabe: 29.04.2020, 12:00 Uhr

Notation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

- Für eine Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $p \in (0,\infty)$ ist die $\ell_p(\mathbb{N})$-(Quasi-)Norm definiert durch $\|\mathbf{a}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{(1/p)}$. Für $p \geq 1$ ist $\ell_p(\mathbb{N}) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|\mathbf{a}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} < \infty\}$ mit der $\ell_p(\mathbb{N})$-Norm ein Banachraum.
- Für $p \in [1,\infty)$ ist die $L_p(\Omega)$-Norm definiert durch $\|f\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{(1/p)}$.
- Die $L_\infty(\Omega)$-Norm ist definiert durch $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$.
- Für $p \in [1,\infty]$ ist der Lebesgueraum $L_p(\Omega)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\|g\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, welche sich nur auf einer Lebesgue-Nullmenge voneinander unterscheiden.
- Die Funktion $g \in L_1(\Omega)$ ist eine schwache Ableitung von $f \in L_1(\Omega)$ bzgl. x_i, wenn
$$\int_\Omega f \partial_{x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g v \,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$
Wir schreiben $\partial_{x_i} f := g$. Hier bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Die Funktion f ist schwach differenzierbar bezüglich $L_p(\Omega)$, wenn $\partial_{x_i} f \in L_p(\Omega)$ für alle $1 \leq i \leq d$.
- Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist die Menge aller $f \in L_2(\Omega)$, für die alle schwachen Ableitungen $\partial_{x_i} f$ existieren und $\partial_{x_i} f \in L_2(\Omega)$ erfüllen. Er ist mit der Norm $\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 := \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} f\|_{L_2(\Omega)}^2$ versehen.
- Der Sobolevraum $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ ist die Menge aller $f \in H^1(\Omega)$ mit $f|_{\partial\Omega} = 0$ in $L_2(\partial\Omega)$, also Nullrandwerten auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Wahl.

a) Jede stetige Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ erfüllt $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

b) Für ein beschränktes Gebiet Ω ist jede Funktion $f \in L_2(\Omega)$ beschränkt.

c) Für ein beschränktes Gebiet Ω und $1 \leq p < q$ gilt $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

d) Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gilt: $\{f \in C^\infty(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} < \infty\}$ ist dicht in $H^1(\Omega)$ bzgl. $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, d. h. zu jedem $u \in H^1(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $v \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie das *Lemma von Stechkin*:
Sei $0 < p \leq q < \infty$ und $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Definiere für $N \in \mathbb{N}$ die Indexmenge $\mathcal{I}_N$ mit $\#\mathcal{I}_N = N$ derart, dass $|a_n| \geq |a_m|$ für alle $n \in \mathcal{I}_N$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{I}_N$. Das heißt, $\mathcal{I}_N$ enthält die N Indizes der betraglich größten Folgenglieder von $\mathbf{a}$. Definiere die Folge $\mathbf{a_N} = ((\mathbf{a_N})_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$(\mathbf{a_N})_n = \begin{cases} a_n & \text{für } n \in \mathcal{I}_N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Folge $\mathbf{a_N}$ besteht also aus den N betraglich größten Folgengliedern von $\mathbf{a}$ und sonst Nullen. Dann gilt

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{a_N}\|_{\ell_q(\mathbb{N})} \leq N^{-r} \|\mathbf{a}\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \qquad \text{mit} \qquad r := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0.$$

Hinweis: Ordnen Sie die Folge $\mathbf{a}$ betraglich absteigend an.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Betrachten Sie für $f \in L_2(\Omega)$ das Problem

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k\nabla u) &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 1 \qquad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $k \in L^\infty(\Omega)$ die Bedingung $k(x) \geq k_0 > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt.

a) Homogenisieren Sie das Problem zu einem Problem der Form

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k\nabla v) &= g \qquad \text{in } \Omega \\ v &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

b) Leiten Sie die variationelle Formulierung des homogenen Problems her (d. h. geben Sie Bilinearform und Linearform sowie die zugehörigen Räume an).

c) Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung v des homogenen Problems.

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) für hinreichend glatte $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{g}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Formel

$$\int_\Omega f\,(\nabla \cdot \mathbf{g})\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathbf{g} \cdot \nabla f\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma,$$

wobei $\mathbf{n}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ die äußere Einheitsnormale bezeichnet, und die Poincaré-Friedrichs Ungleichung: Es gibt eine Konstante $C > 0$ sodass

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L_2(\Omega)} = C\sqrt{\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|^2_{L_2(\Omega)}} \qquad \forall f \in H^1_0(\Omega).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Betrachten Sie auf dem Intervall $[a,b]$ einen kubischen Spline ($k = 4$) zum erweiterten Knotenvektor:

$$\theta_1 = \ldots = \theta_k = a < \theta_{k+1} < \theta_{k+2} < \ldots < \theta_n < b = \theta_{n+1} = \ldots = \theta_{n+k}.$$

Der Spline $S \in \mathcal{S}_{k,\Delta}$ interpoliere die Funktion $f \in C^2([a,b])$ an den Stellen $x_i = \theta_{i+3}$ für $i = 1, \ldots, n-2$, d.h.

$$S(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n-2.$$

Die verbleibenden zwei Freiheitsgrade werden durch die folgende Forderung (vollständiger kubischer Spline) festgelegt:

$$S'(a) = f'(a), \qquad S'(b) = f'(b).$$

Sei $h \coloneqq \max\{|x_{i+1} - x_i| : i = 1, \ldots, n-3\}$ der maximale Abstand zwischen zwei benachbarten Stützstellen.

a) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_a^b (f'' - S'')S''\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $\|f' - S'\|_{\infty,[a,b]} \leq \sqrt{h}\|f''\|_{L_2([a,b])}$, wobei $\|f\|_{\infty,[a,b]} \coloneqq \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ die Supremumsnorm bezeichnet.

   Hinweis: Satz von Rolle, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil a).

c) Zeigen Sie, dass $\|f - S\|_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{1}{2}h^{3/2}\|f''\|_{L_2([a,b])}$.