Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 5

Ausgabe: 06.05.2019 Abgabe: Montag, 13.05.2019 bis 12:00

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei $F : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ linear ist.

Aufgabe 22: (8 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Standardbasis $\mathscr{B} = \{e^1, e^2, e^3\}$. Weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$F(e^1) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F(e^2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F(e^3) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$. Berechnen Sie $F(v)$.

b) Berechnen Sie die Matrix A, für die $Ax = F(x)$ für alle $x \in V$ gilt.

c) Sei nun $\mathscr{B}' := \{w^1, w^2, w^3\}$ mit $w_j := F(e^j)$ für $1 \leq j \leq 3$ eine andere Basis von V. Berechnen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \lambda_{3j} \end{pmatrix}$ mit $F(e^j) = \lambda_{1j} w^1 + \lambda_{2j} w^2 + \lambda_{3j} w^3$ für $1 \leq j \leq 3$.

d) Sei T die Transformationsmatrix von $\mathscr{B}$ nach $\mathscr{B}'$. Zeigen Sie:
$$AT = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$
gilt.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.