PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 11

Ausgabe: 24.06.2019 Abgabe: Montag, 01.07.2019 bis 12:00

Aufgabe 42: (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung φ mit $\varphi(0) = c$ der folgenden Differentialgleichungen mittels Variation der Konstanten:

a) $y' = y + x$;

b) $y' = -xy + 4x$.

Aufgabe 43: (10 Punkte)
Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ soll eine Nullstelle eines nichtlinearen Gleichungssystems gefunden werden, d.h. es soll

$$f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = 0$$

gelöst werden. Dazu läßt sich das Newton-Verfahren für Systeme aus einer Taylorentwicklung wie in (9.4.5) (jedoch jetzt für den Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) von f um einen Punkt $x^k \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(x^k) + Df(x^k)(x - x^k) + \text{Terme höherer Ordnung} \tag{1}$$

herleiten. Hier bezeichne $Df(x^k)$ die in (9.3.2) definierte Jacobi-Matrix von f im Punkt x^k. Approximiert man nun die Nullstelle von f durch die Nullstelle x^{k+1} der linearen Approximation von f in x^k, so folgt mit der Aufgabenstellung $f(x) = 0$

$$0 = f(x^k) + Df(x^k)(x^{k+1} - x^k). \tag{2}$$

Falls $\det Df(x^k) \neq 0$, so folgt durch Umstellen

$$x^{k+1} = x^k - \left(Df(x^k)\right)^{-1} f(x^k). \tag{3}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ lässt sich somit nach Vorgabe eines Startwerts x^0 eine Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von f angeben.

(a) Zeigen Sie, dass aus (2) die Gleichung (3) folgt.

(b) Anstelle der Invertierung der Jacobi-Matrix in (3) löst man für einen Vektor s^k ein lineares Gleichungssystem

$$\left(Df(x^k)\right) s^k = -f(x^k)$$

und berechnet dann $x^{k+1} := x^k + s^k$.
Zeigen Sie, dass diese beiden Schritte dasselbe Ergebnis liefern wie (3).

(c) Betrachten Sie nun das System

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &:= 6x_1 - \cos x_1 - 2x_2 \\ f_2(x_1,x_2) &:= 8x_2 - x_1 x_2^2 - \sin x_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Berechnen Sie eine Approximation einer Nullstelle von f durch Anwendung der Vorschrift aus (b) mit Startvektor $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $k = 1$.