Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 9

Ausgabe: 03.06.2019 Abgabe: Montag, 17.06.2019 bis 12:00

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass alle Diagonalelemente von A positiv sind. Beweisen oder widerlegen Sie, ob die Umkehrung der Aussage auch gilt.

Aufgabe 36: (5 Punkte)
Sei a ein beliebiger reeller Parameter und $A := \begin{pmatrix} 10 & a \\ a & 10 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die Eigenwerte von A. Welche Aussage können Sie über die Definitheit von A treffen?

Aufgabe 37: (3 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := c + x_1^2 - x_2^2$$

mit $c \in \mathbb{R}$ auf lokale Extrema. Zeichnen Sie den Graph von f, also

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = c + x_1^2 - x_2^2\}$$

für $c = 1$.

Aufgabe 38: (8 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) x^* löst das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann, wenn x^* ein Minimum der Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

ist.

(b) Die Äquivalenz aus (a) läßt sich verwenden, um mit Hilfe des *Gradientenverfahrens* die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ iterativ zu berechnen. Wähle dazu einen Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und bestimme für $k = 0, 1, 2, \ldots$

(i) die Abstiegsrichtung $d^k := -\nabla f(x^k)$;

(ii) das Minimum von f auf der Linie $\{x^k + \alpha d^k,\ \alpha \geq 0\}$; dieses sei mit α_k bezeichnet;

(iii) $x^{k+1} := x^k + \alpha_k d^k$.

Zeigen Sie, dass d^k sich als $d^k = b - Ax^k$ berechnen lässt. Zeigen Sie des weiteren, dass sich das Minimum von f in (ii) als

$$\alpha_k = \frac{(d^k)^T d^k}{(d^k)^T A d^k}$$

ergibt. (Hinweis: Betrachte $\tilde{f}(\alpha) := f(x^k + \alpha d^k)$ und berechne das Minimum von $\tilde{f}$.) Formulieren Sie schliesslich obiges Gradientenverfahren mit diesen Ersetzungen.