

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 8

Ausgabe: 27.05.2019

Abgabe: Montag, 03.06.2019 bis 12:00

Aufgabe 31: (5 Punkte)

Laut Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für eine stetige und auf einem Intervall (a, b) differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$. Zeigen Sie anhand der Funktion

$$F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix},$$

dass sich dieser Mittelwertsatz nicht auf den mehrdimensionalen Fall übertragen lässt. Rechnen Sie anschließend nach, dass der Mittelwertsatz 9.3.8 aus der Vorlesung für F gilt.

Aufgabe 32: (5 Punkte)

Sei $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige vektorwertige Funktion auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt$$

gilt.

Aufgabe 33: (6 Punkte)

In Korollar 9.4.5 haben Sie die Approximation einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch das Taylorpolynom zweiter Ordnung als

$$T_{f,a}(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \frac{1}{2} \langle x - a, (\text{Hess} f)(a)(x - a) \rangle$$

für eine Auswertungsstelle $a \in U$ kennen gelernt.

- a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung für die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1 + x_1}{1 + x_2}$$

bezüglich der Auswertungsstelle $a = (a_1, a_2)$.

- b) Wie sieht das Taylorpolynom aus a) bezüglich der Entwicklungspunkte $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ aus?

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung für die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x_1, x_2) = \frac{\exp(x_1 + x_2)}{\exp(x_1) + \exp(x_2)}$$

im Nullpunkt.