PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 7

Ausgabe: 20.05.2019 Abgabe: Montag, 27.05.2019 bis 12:00

Aufgabe 28: (3+5 Punkte)
Sei $f : (\mathbb{R}^n \setminus 0) \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $x \mapsto f(r)$ mit $r := \|x\|$ (Euklidische Norm von x). In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\Delta f(r) = f''(r) + f'(r)\,\frac{n-1}{r}$$

gilt, wobei Δ den Laplace-Operator bezüglich x bezeichnet. Zeigen Sie mithilfe dieser Darstellung, dass die folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung

$$\Delta F(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

sind:

(a) $F_1 : (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_1(x,t) := \frac{\sin(r-ct)}{r}$$

mit $r = \|x\|$ und $c \neq 0$.

(b) $F_2 : (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$F_2(x,t) := \frac{\exp(i(r-ct))}{r}$$

mit $r = \|x\|$ und $c \neq 0$.

Aufgabe 29: (4+2 Punkte)
Sei $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto u(t,x)$. Für $c > 0$ betrachten wir die semilineare Transportgleichung

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = u(t,x)^2$$

mit Anfangsbedingung $u(0,x) = -\frac{1}{1+x^2}$. Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) := -\frac{1}{t+1+(x-ct)^2}$$

eine Lösung der semilinearen Transportgleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung ist.

Aufgabe 30: (3+3 Punkte)

(a) Gesucht ist die Lösung $u : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \setminus 0) \to \mathbb{R}$ der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$$

diese partielle Differentialgleichung löst.

(b) Wir betrachten nun die Wärmeleitungsgleichung in $n > 1$ Dimensionen,

$$\Delta U(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} U(x,t) = 0,$$

wobei Δ wie in Aufgabe 28 den Laplace-Operator bzgl. x bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Funktion $U : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+ \setminus 0) \to \mathbb{R}$, gegeben als

$$U(x,t) = t^{-n/2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4t}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung in n Dimensionen löst.
Hinweis: Verwenden Sie wie in Aufgabe 28, dass Sie mit $r := \|x\|$ den Laplace-Operator Δ mittels Ableitungen bzgl. r ausdrücken können.