PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 4

Ausgabe: 29.04.2019 Abgabe: Montag, 06.05.2019 bis 12:00

Aufgabe 17: (6 Punkte)

(i) Seien $f,g \in \mathbb{R}[t]$ mit $f(t) := 9t^5 + 12t^4 \ + 10t^3 + 4t^2 + 4t + 2$ und $g(t) := 3t^2 + 2t + 1$. Bestimmen Sie $q, r \in \mathbb{R}[t]$ mit $f = q \cdot g + r$.

(ii) Sei K ein beliebiger Körper und $\lambda \in K$ Nullstelle von $f \in K[t]$. Zeigen Sie Lemma 4.1.6 der Vorlesung: Es gibt ein eindeutiges $q \in K[t]$, sodass $f(t) = (t - \lambda) \cdot q(t)$ und $\deg q = \deg f - 1$.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen $(\oplus, \cdot)$.

(i) Geben Sie 3 verschiedene Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

(ii) Geben Sie 2 verschiedene Erzeugendensysteme an, welche keine Basen sind.

Aufgabe 19: (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathscr{B} = \{v^1, \ldots v^n\}$ eine Familie von Vektoren im K-Vektorraum $V \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathscr{B}$ ist eine Basis.

(ii) Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutige $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v^j.$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Dann ist der Kern von A definiert durch $\mathrm{Ker}(A) := \{x \in K^n : Ax = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(A)$ ein Untervektorraum von K^n ist.