

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 3

Ausgabe: 15.04.2019

Abgabe: Montag, 29.04.2019 bis 12:00

Aufgabe 10: (3 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, ob das Iterationsverfahren aus der Vorlesung (Satz 3.6.4) zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung der Fixpunktgleichung $\tilde{f}(x) = x$ anwendbar ist:

- (a) $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) := \exp(x)$,
- (b) $\tilde{f}: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) := \exp(x)$,
- (c) $\tilde{f}: [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) := \sin(x)$.

Aufgabe 11: (6 Punkte)

Sei $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}x + \pi$.

- (a) Begründen Sie, warum das Verfahren aus Satz 3.6.4 zur Bestimmung der Lösung der Fixpunktgleichung $\tilde{f}(x) = x$ anwendbar ist.
- (b) Geben Sie für $x_0 := 8$ die ersten 4 Iterationen an (mit Werten π , also nicht gerundet).
- (c) Berechnen Sie x_n und beweisen Sie die Korrektheit mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 12: (7 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{R}_+$ mit $c \neq 0$. Dann ist \sqrt{c} eine Nullstelle des Polynoms $x^2 - c$. Dadurch kann man \sqrt{c} mit dem Newtonschen-Verfahren bestimmen.

- (a) Wie muss das Intervall $I := [a, b]$ gewählt werden, damit die Voraussetzungen aus Satz 3.6.6 erfüllt sind?
- (a) Wie muss x_0 gewählt werden, damit x_n nach Satz 3.6.6 gegen \sqrt{c} konvergiert?
- (b) Sei $c := 3$ und $x_0 := 2$. Berechnen Sie näherungsweise $\sqrt{3}$, indem Sie die ersten 3 Iterierten bestimmen. Wie groß ist der Fehler für $n = 3$ gemäß der Fehlerabschätzung?

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Zahlen, gegen die $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bei folgenden Startpunkten konvergiert:

- (a) $x_0 := 4, x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - 2x_n - 3}{2x_n - 2}$.
- (b) $x_0 := 2, x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 + 2x_n - 3}{2x_n + 2}$.

Bitte Rückseite beachten!

Aufgabe 14: (10 Punkte)

Weisen Sie nach, welche der folgenden Mengen bezüglich der angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe bilden und welche nicht.

- (a) \mathbb{Z} bzgl. $+$ (Addition),
- (b) \mathbb{Q} bzgl. $+$,
- (c) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bzgl. \cdot (Multiplikation),
- (d) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bzgl. $+$,
- (e) \mathbb{N}_0 bzgl. $-$ (Subtraktion).

Aufgabe 15: (5 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Ringe sind:

- (a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,
- (b) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Aufgabe 16: (5 Punkte)

Berechnen Sie:

- (a) $3^{123} \bmod 3$,
- (b) $5^{123} \bmod 2$,
- (c) $5^{123} \bmod 10$,
- (d) die letzte Dezimalstelle von 9^{281} ,
- (e) die letzte Dezimalstelle von 2^{128} .