

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Übungsblatt 2

Ausgabe: 08.04.2019

Abgabe: Montag, 15.04.2019 bis 12:00

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Man nennt eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Norm, wenn sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $\|kx\| = |k|\|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Zeigen Sie, dass die p -Norm $\|\cdot\|_p$ definiert als $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ für $p \in [1, \infty)$ tatsächlich eine Norm ist.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ gilt.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Berechnen Sie mit den Regeln von de l'Hospital:

- (a) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x-3}$.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Für ein Polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ vom Grad n mit reellen Koeffizienten und $a_n \neq 0$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0$$

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Sei $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert ist. Zeigen Sie:

- (a) Es existiert ein $\xi \in (-1, 1)$ mit $f'(\xi) = 0$,
- (b) Es existiert ein $\xi \in (-1, 0)$ mit $f'(\xi) = 1$.