Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE II
SOMMERSEMESTER 2019

Bonusblatt

Ausgabe: 01.07.2019 Abgabe: Montag, 08.07.2019 bis 12:00

Aufgabe 44: (4 Punkte)
Kreuzen Sie die richtige Auswahlmöglichkeit an. Es ist jeweils nur **eine** Antwort richtig, pro richtiger Antwort gibt es zwei Punkte.

1. Sei K eine Menge und

$$+ : K \to K, (a,b) \to a+b$$
$$\cdot : K \to K, (a,b) \to a \cdot b$$

Verknüpfungen auf K. Dann ist K ein Körper, wenn

◯ $(K,+)$ eine abelsche Gruppe ist.
◯ $(K,\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.
◯ K ein kommutativer Ring und $(K\backslash\{0\},\cdot)$ abelsche Gruppe ist.
◯ K ein kommutativer Ring und $(K,+)$ eine abelsche Gruppe ist.

2. Welcher der folgenden Aussagen über die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stimmen Sie zu?

◯ Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 1$.
◯ Für $A = I_n$ ist $\det A = 0$.
◯ $\det A = 0$ genau dann, wenn rang $A = n$.
◯ Falls A invertierbar ist, gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

3. Sei $U \subset R^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

◯ f hat in $x \in U$ ein strikt lokales Minimum, falls $\nabla f(x) = 0$ und $(\text{Hess} f)(x)$ positiv definit ist.
◯ f hat in $x \in U$ ein strikt lokales Minimum, falls $\nabla f(x) = 0$ und $(\text{Hess} f)(x)$ negativ definit ist.
◯ $\nabla f(x) = 0$ ist hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum von f in x.
◯ $(\text{Hess} f)(x) = 0$ ist hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum von f in x.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir betrachten für $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die Differentialgleichung

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Wann ist eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung mit gegebener Anfangsbedingung eindeutig?

◯ Die Lösung ist immer eindeutig.
◯ Die Lösung ist nie eindeutig.
◯ Die Lösung ist eindeutig, falls φ Lipschitz-stetig ist.
◯ Die Lösung ist eindeutig, falls f Lipschitz-stetig bezüglich y ist.

Aufgabe 45: (6 Punkte)
Sei K ein Körper und $\mathscr{B} = \{v^1, \dots v^n\}$ eine Familie von Vektoren im K-Vektorraum $V \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathscr{B}$ ist eine Basis.

(ii) Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutige $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v^j.$$

Aufgabe 46: (5 Punkte)

(i) Sei $v : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ eine stetige vektorwertige Funktion auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\left\| \int_a^b v(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt$$

gilt.

(ii) Laut Mittelwertsatz gilt für $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar

$$f(x+\xi) - f(x) = \left(\int_0^1 \mathrm{D}f(x+t\xi)dt \right) \xi$$

für $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Verbindungsstrecke $x + t\xi \in U$ für $0 <= t <= 1$.
Zeigen Sie, dass

$$\|f(x+\xi) - f(x)\| \leq M\|\xi\|$$

gilt, wobei die Konstante M definiert ist als

$$M := \max_{0 \leq t \leq 1} \|\mathrm{D}f(x+t\xi)\|$$

Aufgabe 47: (5 Punkte)
Berechnen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3$$

mit $y(0) = c$ mittels Variation der Konstanten. Machen Sie anschließend eine Probe, um Ihre Lösung zu verifizieren.