Prof. Dr. Angela Kunoth
Anna Weller

Mathematik für Lehramtstudierende
Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 12

Ausgabe: 09.01.2019 — Abgabe: Mittwoch, 16.01.2019 bis 12:00

Aufgabe 48: (6 Punkte)

(i) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige, in (a,b) differenzierbare Funktion. Für die Ableitung gelte

$$m \le f'(\xi) \le M$$

für alle $\xi \in (a,b)$ mit gewissen Konstanten $m,M\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann für alle $x_1,x_2\in(a,b)$ mit $x_1\le x_2$ die Abschätzung

$$m(x_2-x_1)\le f(x_2)-f(x_1)\le M(x_2-x_1)$$

gilt.

(ii) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige, in (a,b) differenzierbare Funktion mit $f'(x)=0$ für alle $x\in(a,b)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(iii) Zeigen Sie: $F,G:I\to\mathbb{R}$ sind Stammfunktionen von $f:I\to\mathbb{R}$ genau dann, wenn $F-G$ konstant ist.

Aufgabe 49: (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_a^b x\,f(x^2)\,dx;$

(ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin y}{\cos y}\,dy \quad \text{für} \quad [a,b]\subseteq\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right);$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt.$

Aufgabe 50: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} 4x^2e^{-2x}dx;$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 9x^2e^{3x}dx.$

Aufgabe 51: (4 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung $T_n[f,a](x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ folgender Funktionen und Entwicklungspunkte:

(i) $f(x) := xe^x$ für $a=0$;

(ii) $f(x) := \cos x$ für $a=\frac{\pi}{6}$.