Universität zu Köln

PROF. DR. ANGELA KUNOTH
ANNA WELLER

MATHEMATIK FÜR LEHRAMTSTUDIERENDE
WINTERSEMESTER 2018/2019

Übungsblatt 11

Ausgabe: 19.12.2018 Abgabe: Mittwoch, 09.01.2019 bis 12:00

Aufgabe 44: (6 Punkte)
Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\cos x := \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin x := \operatorname{Im}(e^{ix})$ und erhalten daraus die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

(i) Zeigen Sie, dass $|e^{ix}| = 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Zeichnen Sie $e^{ix}, \cos x$ und $\sin x$ in der Gauß'schen Zahlenebene. Zeichnen Sie hierzu zunächst den Einheitskreis, um sin und cos als Projektion von e^{ix} auf die reelle bzw. imaginäre Achse darzustellen.

Nach der Definition können wir auch

$$\cos x := \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin x := \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben. Zeigen Sie nun mithilfe dieser Darstellung:

(iii) $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(iv) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

(v) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ und $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 45: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und die Reihen konvergieren absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 46: (4 Punkte)
Mithilfe der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe und des Zwischenwertsatzes kann man zeigen, dass $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt. Wir definieren nun $\frac{\pi}{2}$ als diese Nullstelle. Zeigen Sie:

(i) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ (ii) $e^{i\pi} = -1$

(iii) $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ (iv) $e^{2\pi i} = 1$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sin x > 0$ für $x \in [0,2]$ gilt

Aufgabe 47: (6 Punkte)
Ähnlich zur Exponentialreihe kann man auch für cos und sin eine Abschätzung der Restglieder herleiten. Hier gilt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x),$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x),$$

wobei

$$R_{2n+2}(x) \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \le 2n+3,$$
$$R_{2n+3}(x) \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für } |x| \le 2n+4.$$

(i) Nutzen Sie das Restglied 3. Ordnung, also $R_3(x)$ für $n = 0$ in obiger Darstellung der Reihe für den Sinus, um
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
für $x \neq 0$ zu zeigen.

(ii) Nutzen Sie Teil (i) sowie die Stetigkeit der Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um die Ableitungen $\cos'$ und $\sin'$ mithilfe der Grenzwertdefinition zu bestimmen.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass aus Aufgabe 44 (v) folgt:

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

und

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$